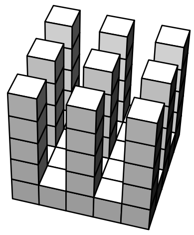
Klassenstufen 11 bis 13

Donnerstag, 20. März 2014 Arbeitszeit: 75 Minuten

1. Von den jeweils 5 Antworten ist genau eine richtig.
2. Jeder Teilnehmer bekommt zu Beginn 30 Punkte. Bei einer richtigen Antwort werden die dafür vorgesehenen 3, 4 oder 5 Punkte hinzuaddiert. Wird keine Antwort gegeben, gibt es 0 Punkte. Ist die Antwort falsch, werden 3/4, 4/4 oder 5/4 Punkte abgezogen. Die höchste zu erreichende Punktzahl ist 150, die niedrigste 0.
3. Taschenrechner sind nicht zugelassen.

3-Punkte-Aufgaben

A1 Aus einem $5 \times 5 \times 5$-Würfel wurden einige kleine Würfel entfernt. Übrig geblieben sind die unterste Würfelschicht und mehrere gleich hohe Säulen (s. Abb.). Wie viele kleine Würfel wurden entfernt?



(**A**) 60 (**B**) 64 (**C**) 68 (**D**) 72 (**E**) 80

A2 $\dfrac{2^8 - 2^7}{2^6 - 2^5} =$

(**A**) 2^4 (**B**) 2^3 (**C**) 2^2 (**D**) 2^1 (**E**) 2^0

A3 Carla, Emilie und Lilia haben alle drei heute Geburtstag. Albert addiert das Alter der drei und erhält 55. Er freut sich schon auf die Feier, wenn die Summe des Alters der drei das nächste Mal eine Zahl aus lauter gleichen Ziffern ist. Wie alt werden die drei dann zusammen sein?

(**A**) 66 (**B**) 77 (**C**) 88 (**D**) 99 (**E**) 111

A4 In die vier leeren Felder der Tabelle sollen die vier Zahlen 5, 6, 7 und 8 so eingetragen werden, dass die Summe in jeder der vier Spalten gerade ist. Wie viele Möglichkeiten gibt es dafür?

1	2	3	4

(**A**) 2 (**B**) 4 (**C**) 8 (**D**) 12 (**E**) 24

A5 Volker hat vier Freunde, die wie er Brieftauben besitzen. Sie schreiben sich häufig. Heute sind 8 Tauben von seinen Freunden in Volkers Taubenschlag angekommen. Nur eine der folgenden Aussagen ist *mit Sicherheit* richtig. Welche?

(**A**) Jeder der vier Freunde hat 2 Tauben geschickt.
(**B**) Jeder der vier Freunde hat mindestens eine Taube geschickt.
(**C**) Keiner der vier Freunde hat 8 Tauben geschickt.
(**D**) Einer der vier Freunde hat mindestens 2 Tauben geschickt.
(**E**) Zwei der Tauben wurden von verschiedenen Freunden geschickt.

A6 In einem Koordinatensystem ist ein Quadrat gezeichnet, eine Diagonale liegt auf der y-Achse. Ein Eckpunkt hat die Koordinaten $(0; -5)$, ein anderer Eckpunkt hat die Koordinaten $(0; 1)$. Wie lauten die Koordinaten eines weiteren Eckpunkts des Quadrats?

(**A**) $(4; 0)$ (**B**) $(6; -2)$ (**C**) $(5; 3)$ (**D**) $(-1; -3)$ (**E**) $(-3; -2)$

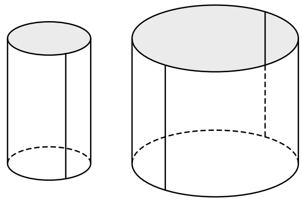
A7 Für reelle Zahlen a, b, c, für die $a = 18 - b$ und $b = 10 - c$ gilt, ist nur eine der folgenden Ungleichungen *mit Sicherheit* erfüllt. Welche?

(**A**) $a > c$ (**B**) $a > b$ (**C**) $b > c$ (**D**) $c > b$ (**E**) $c > a$

A8 Wie viele Stellen hat die Zahl $(2^3)^4 \cdot (5^4)^3$?

(**A**) 7 (**B**) 8 (**C**) 9 (**D**) 12 (**E**) 13

A9 Ich habe zwei Zylinder gleicher Höhe. Mit einem quadratischen Stück Papier kann ich den Mantel des kleinen Zylinders vollständig und ohne Überlappungen bekleben. Für den großen Zylinder brauche ich genau zwei solche quadratische Stücke Papier. In welchem Verhältnis steht das Volumen des großen Zylinders zum Volumen des kleinen Zylinders?



(**A**) $2:1$ (**B**) $3:1$ (**C**) $\pi:1$ (**D**) $4:1$ (**E**) $2\pi:1$

A10 In der aktuellen Jahreszahl 2014 ist die letzte Ziffer größer als die Summe der anderen drei Ziffern und alle Ziffern sind verschieden. Wann war dies das letzte Mal der Fall?

(**A**) vor 215 Jahren (**B**) vor 305 Jahren (**C**) vor 395 Jahren
(**D**) vor 405 Jahren (**E**) vor 485 Jahren

4-Punkte-Aufgaben

B1 Charles, Steven und Robert haben zusammen 48 DVDs zu Hause. Charles und Robert besitzen zusammen doppelt so viele DVDs wie Steven. Und Steven besitzt doppelt so viele wie Charles. Wie viele DVDs besitzt Robert?

(**A**) 16 (**B**) 20 (**C**) 24 (**D**) 30 (**E**) 32

B2 Vier Mannschaften bestreiten ein Floorball-Turnier. Jede tritt gegen jede andere genau einmal an. Der Sieger eines Spiels erhält 3 Punkte, der Verlierer keinen und bei einem Unentschieden erhalten beide Mannschaften je 1 Punkt. Zum Turnierende hat eine Mannschaft 7 Punkte, und zwei Mannschaften haben je 4 Punkte. Wie viele Punkte hat die vierte Mannschaft erreicht?

(**A**) 5 (**B**) 3 (**C**) 2 (**D**) 1 (**E**) 0

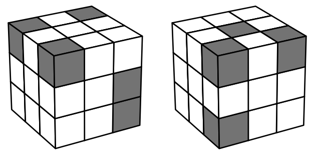
B3 Ein Quader hat die Kantenlängen a, b und c, wobei $1 < a < b < c$ gilt. Ich stelle mir einen zweiten Quader vor, bei dem eine der drei Kantenlängen a, b oder c um 1 verkürzt ist. In welchem Fall ist das Volumen dieses Quaders am kleinsten?

(**A**) wenn a verkürzt ist (**B**) wenn b verkürzt ist
(**C**) wenn c verkürzt ist (**D**) Es hängt von den Maßen von a, b, c ab.
(**E**) Die Volumina bei (**A**), (**B**) und (**C**) sind alle gleich groß.

B4 Sechs Wochen sind genau $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ Sekunden. Wie groß ist n?

(**A**) 6 (**B**) 7 (**C**) 8 (**D**) 10 (**E**) 12

B5 Rechts ist zweimal derselbe Würfel abgebildet, jedoch aus unterschiedlichen Blickrichtungen. Er besteht aus 27 gleich großen Würfeln, von denen einige grau sind. Welche maximale Anzahl von Würfeln kann grau sein?



(**A**) 6 (**B**) 7 (**C**) 8 (**D**) 9 (**E**) 10

B6 Um 15 Uhr ist Luise bei Sonja verabredet. Luise radelt zügig und schafft in 2/3 der geplanten Zeit bereits 3/4 der Strecke. Danach fährt sie gemütlicher weiter und kommt wie geplant um 15 Uhr bei Sonja an. In welchem Verhältnis steht Luises Durchschnittsgeschwindigkeit auf dem ersten Teil der Strecke zu ihrer Durchschnittsgeschwindigkeit auf dem zweiten Teil der Strecke?

(**A**) 5 : 4 (**B**) 4 : 3 (**C**) 3 : 2 (**D**) 2 : 1 (**E**) 3 : 1

B7 Von zwei Quadraten ist bekannt, dass sich ihre Flächeninhalte um $13\,\text{cm}^2$ unterscheiden. Um wie viel unterscheiden sich ihre Seitenlängen?

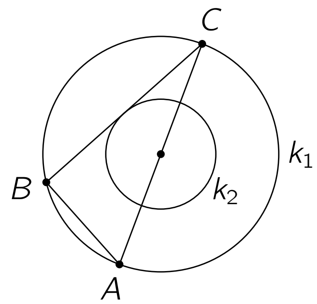
(**A**) um 3 cm (**B**) um $\frac{10}{3}$ cm (**C**) um $\sqrt{13}$ cm

(**D**) um 13 cm (**E**) Es gibt unendlich viele Möglichkeiten.

B8 Ein Frischkäse hat laut Etikett einen Fettgehalt von 24 %, während der Fettgehalt in Trockenmasse 64 % beträgt. Wie viel Prozent Wasser sind in diesem Käse?

(**A**) 88 % (**B**) 62,5 % (**C**) 49 % (**D**) 42 % (**E**) 37,5 %

B9 Die Kreise k_1 und k_2 haben denselben Mittelpunkt. Der Radius von k_1 ist dreimal so lang wie der Radius von k_2 (*Abb. nicht maßstabsgerecht*). $\overline{AC}$ ist ein Durchmesser von k_1, die Sehne $\overline{BC}$ ist gleichzeitig Tangente an k_2. Es ist $|\overline{AB}| = 12$. Wie lang ist der Radius von k_1?



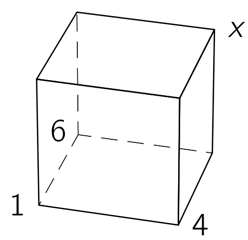
(**A**) 15 (**B**) 18 (**C**) 21 (**D**) 24 (**E**) 27

B10 Was gilt *ganz sicher*, wenn für drei von 0 verschiedene reelle Zahlen a, b, c die beiden Zahlen $(-2)^3a^2b^{-1}c^2$ und $(-3)^2a^3b^5c^{-4}$ dasselbe Vorzeichen haben?

(**A**) $a > 0$ (**B**) $b > 0$ (**C**) $c > 0$ (**D**) $a < 0$ (**E**) $b < 0$

5-Punkte-Aufgaben

C1 Die 8 Ecken eines Würfels sollen so mit 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 markiert werden, dass die 6 Summen von den jeweils 4 zu einer Würfelseite gehörenden Zahlen gleich sind. Drei Ecken sind bereits markiert. Für welche Zahl steht x?



(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) 5 (**D**) 7 (**E**) 8

C2 Wie viele Möglichkeiten gibt es, drei natürliche Zahlen a, b, c anzugeben, für die $a > b > c > 1$ und $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > 1$ gilt?

(**A**) keine (**B**) genau eine (**C**) genau zwei (**D**) genau drei (**E**) unendlich viele

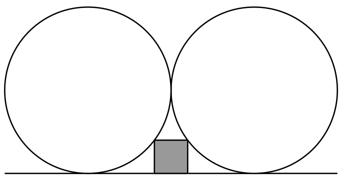
C3 Von 10 verschiedenen positiven ganzen Zahlen sind genau 5 durch 5 teilbar und genau 7 durch 7 teilbar. Wie groß ist die größte dieser Zahlen *mindestens*?

(**A**) 105 (**B**) 77 (**C**) 75 (**D**) 70 (**E**) 63

C4 Prisca hat 22 Socken in ihrer Sockenschublade, nur blaue und weiße. Wenn sie 3 Socken zufällig herausnimmt, ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle 3 Socken weiß sind, gleich $\frac{1}{7}$. Wie viele weiße Socken sind in Priscas Sockenschublade?

(**A**) 20 (**B**) 18 (**C**) 16 (**D**) 14 (**E**) 12

C5 Die Abbildung zeigt zwei sich berührende Kreise mit Radius 1 und ein Quadrat, das die Kreise berührt. Eine Quadratseite liegt auf einer gemeinsamen Tangente der Kreise. Wie groß ist die Seitenlänge des Quadrats?

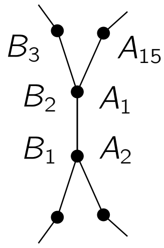


(**A**) $\frac{2}{5}$ (**B**) $\frac{1}{4}$ (**C**) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (**D**) $\frac{1}{5}$ (**E**) $\frac{1}{2}$

C6 László möchte möglichst viele verschiedene natürliche Zahlen aufschreiben, die alle kleiner oder gleich 100 sind und deren Produkt *nicht* durch 54 teilbar ist. Wie viele Zahlen kann László höchstens aufschreiben?

(**A**) 54 (**B**) 62 (**C**) 67 (**D**) 69 (**E**) 81

C7 Ein regelmäßiges 15-Eck $A_1A_2 \ldots A_{15}$ und ein regelmäßiges n-Eck $B_1B_2 \ldots B_n$ haben beide die Seitenlänge 1 und die gemeinsame Seite $\overline{B_1B_2} = \overline{A_2A_1}$ (*Abb. nicht maßstabsgerecht*). Für welches n hat die Strecke $\overline{A_{15}B_3}$ die Länge 1?

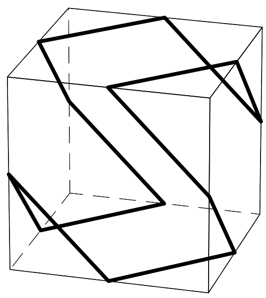


(**A**) 10 (**B**) 12 (**C**) 15 (**D**) 16 (**E**) 18

C8 Wie viele Paare (m, n) positiver ganzer Zahlen gibt es, für die $\sqrt[n]{2014 + m}$ und $\sqrt[n]{1024} + 1$ dieselbe ganze Zahl ergeben?

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 5

C9 Auf einem Würfel ist ein Streckenzug gezeichnet, der benachbarte Kantenmittelpunkte verbindet (s. Abb.). Wenn A ein Eckpunkt des Streckenzuges ist und X und Y dessen Nachbarn, so wird als *Winkel des Streckenzugs bei A* der Innenwinkel $\measuredangle XAY$ im Dreieck AXY bezeichnet. Wie groß ist die Summe aller 12 Winkel des Streckenzugs?



(**A**) 720° (**B**) 1080° (**C**) 1200° (**D**) 1440° (**E**) 1800°

C10 Im Wald des Wandels gibt es merkwürdige Wesen: 17 Bimsel, 55 Gnafze und 6 Ylpen. Treffen ein Bimsel und ein Gnafz aufeinander, verschmelzen sie zu einer Ylpe. Treffen ein Bimsel und eine Ylpe aufeinander, verschmelzen sie zu einem Gnafz. Treffen ein Gnafz und eine Ylpe aufeinander, verschmelzen sie zu einem Bimsel. Dies führt dazu, dass irgendwann nur noch eine der drei Arten übrig ist. Wie viele Wesen dieser Art sind dann höchstens übrig?

(**A**) 1 (**B**) 6 (**C**) 17 (**D**) 23 (**E**) 35