KANTONSSCHULE REUSSBÜHL

Maturitätsprüfungen 2005
(Be, Gä, Ko, Rc, Sw)

M a t h e m a t i k Grundlagenfach

Bemerkungen : Zeit : Drei Stunden
Formeln und Tafeln DMK/DPK
Taschenrechner TI83 / TI89
Jede vollständig gelöste Aufgabe wird mit 10 Punkten bewertet.
Für 40 Punkte wird die Note 6 erteilt.

1. Lösen Sie die beiden unabhängigen Teilaufgaben:

a) Berechnen Sie x aus der Gleichung $\int_0^x (t^2 - 13t + 30)\,dt = 0$

b) Dem Kreis k: $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$ ist das Quadrat einzubeschreiben, von dem eine Diagonale parallel zum Vektor $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ verläuft. Bestimmen Sie die Koordinaten der Ecken und den Flächeninhalt des Quadrates.

2. Der Graph G_f einer Funktion f besteht aus einem Parabelstück von A(-u/0) nach B(u/0) und der Strecke von B nach C(5/2). Zum Parabelstück gehöre die Gleichung $g(x) = a(x^2 - 4)$.

a) Bestimmen Sie zuerst u und berechnen Sie dann den Parameter a so, dass die Funktion f an der Stelle u differenzierbar ist.

Rechnen Sie in Aufgabe b) und c) mit dem in Aufgabe a) bestimmten Wert des Parameters a.

b) Die y-Achse, G_f und die Tangente in B an G_f schliessen ein Flächenstück ein. Dieses rotiere um die x-Achse. Wie gross ist das Volumen des entstandenen Rotationskörpers?

c) Dem vom Parabelstück und der x-Achse begrenzten Flächenstück wird ein rechtwinkliges Dreieck OPQ mit rechtem Winkel bei Q einbeschrieben. O ist der Ursprung, P(x>0/y) liegt auf der Parabel und Q auf der x-Achse. Bestimmen Sie die Koordinaten von P so, dass der Inhalt des Dreiecks maximal wird.

d) Berechnen Sie den Parameter a so, dass der Inhalt der Fläche zwischen der x-Achse und der Parabel 64 Flächeneinheiten beträgt.

3. Auf den Seitenflächen eines regulären Tetraeders stehen die Ziffern 1,2,3 und 4. Bei einem Wurf gilt die Ziffer derjenigen Seitenfläche, auf der das Tetraeder steht, als geworfen. Gegen einen Einsatz von Fr. 4.- darf man folgendes Spiel spielen.
Wirft man eine ungerade Ziffer, so erhält man als Auszahlung die geworfene Ziffer in Franken. Wirft man eine gerade Ziffer, darf man nochmals werfen und man erhält als Auszahlung die **Summe** der beiden geworfenen Ziffern in Franken.

a) Die Zufallsvariable X sei die Auszahlung in Franken. Geben Sie die Verteilung und den Erwartungswert von X an. Ist also das Spiel fair?
b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, in einem Spiel **mehr** als seinen Einsatz ausbezahlt zu erhalten?
c) Man hat 3 Franken als Auszahlung erhalten. Wie wahrscheinlich ist es, das Tetraeder nur einmal geworfen zu haben?
d) Man spielt nun dieses Spiel zehnmal. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mindestens fünfmal mehr als seinen Einsatz ausbezahlt zu erhalten.
e) Wie viele Spiele müsste man mindestens spielen, um mit mehr als 99% Wahrscheinlichkeit mindestens einmal mehr als seinen Einsatz ausbezahlt zu erhalten?

4. Gegeben sind die beiden Funktionen f: $y = 2e^{-x}$ und g: $y = -2xe^{-x}$

a) Bestimmen Sie den Schnittpunkt sowie eventuell vorhandene Extrema und Wendepunkte der beiden Graphen und die Grenzwerte der Funktionen für $x \to \infty$.
Berechnen Sie noch einige Funktionswerte und zeichnen Sie beide Graphen im Intervall [-1,4] in dasselbe Koordinatensystem. Einheit 2cm.
b) Für welche Stelle x wird die Differenz der Funktionswerte von f und g maximal?
c) Wie gross ist der Inhalt derjenigen Fläche zwischen den beiden Graphen, die in positiver x-Richtung ins Unendliche reicht?

5. Gegeben sind die Punkte A(3/1/1), B(4/2/0), C(2/2/2) und D(4/2/4) sowie die Ebene Δ: $3x + 4y - z - 16 = 0$.

a) Wie lautet die Koordinatengleichung der Ebene E = (ABC) ?
b) Wie gross ist der Winkel α des Dreiecks ABC bei A?
c) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC gleichschenklig ist und berechnen Sie seinen Flächeninhalt F.
d) Bestimmen Sie die Gleichung der Schnittgeraden s von E und Δ. Schneidet s die Gerade (AC)?
e) Beweisen Sie, dass die Strecke CD senkrecht auf der Ebene E steht und berechnen Sie dann das Volumen V der Pyramide ABCD.