KANTONSSCHULE REUSSBÜHL 2008 — Maturitätsprüfungen
(An, Be, Do, Es, Gä, Rc, Sw)

M a t h e m a t i k Grundlagen

Bemerkungen

Zeit : 180 Minuten.
Fundamentum Mathematik und Physik.
Taschenrechner TI 83 bzw. TI voyage200.
Jede vollständig gelöste Aufgabe wird mit 10 Punkten bewertet.
Für 40 Punkte wird die Note 6 erteilt.

1. Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $y = f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2}$

   a) Geben Sie den Definitionsbereich an und untersuchen Sie die Funktion auf Nullstellen, Asymptoten, Extremal- und Wendepunkte.
   Zeichnen Sie den Graphen G_f im Bereich $-5 < x < 5$. (Längeneinheit 1cm)
   Zur Kontrolle: Die zweite Ableitungsfunktion hat die Gleichung $y'' = \dfrac{-8x + 18}{x^4}$.
   b) Bestimmen Sie die Kurvennormale n in derjenigen Nullstelle, die am nächsten beim Ursprung liegt. Spiegeln Sie n an der Geraden mit der Gleichung $x = 2$. Geben Sie die Funktionsgleichung dieser gespiegelten Geraden h an.
   c) Die x-Achse und die zwei Geraden n und h bestimmen ein gleichschenkliges Dreieck (die Basis des Dreiecks liegt also auf der x-Achse). Diesem Dreieck ist ein Rechteck mit maximalem Flächeninhalt einzubeschreiben, so dass eine Seite des Rechtecks auf der x-Achse liegt. Berechnen Sie diesen Flächeninhalt.
   d) Der Graph G_f und die horizontale Asymptote begrenzen im 1. und 4. Quadranten eine nach rechts ins Unendliche reichende Fläche. Untersuchen Sie, ob diese Fläche einen endlichen Inhalt besitzt.

2. In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte A(-1|3|-2), B(-1|-3|4) und C(7|-5|2) gegeben.

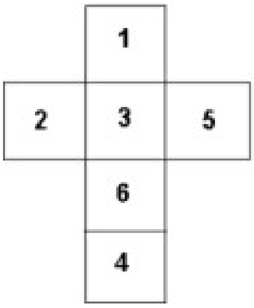
   a) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC gleichschenklig und rechtwinklig ist.
   b) Bestimmen Sie die Koordinatengleichung der Ebene E, in der das Dreieck ABC liegt.
   c) M ist der Mittelpunkt der Strecke AC. Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punktes P ausserhalb des Dreiecks ABC, der auf der Geraden (BM) liegt und für den $\overline{BM} : \overline{MP} = 1:1$ gilt.
   d) Der Punkt D(5|0|-2), der ebenfalls auf der Geraden (BM) liegt, bildet mit den Punkten A, B und C ein Viereck. Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Vierecks ABCD.
   e) Eine Normale zur Ebene E geht durch den Punkt M. Bestimmen Sie auf dieser Normalen zwei Punkte R und S, die mit den Punkten A und C ein Quadrat bilden.

3. Gegeben ist die Funktionenschar f_p: $x \rightarrow p \cdot x^3 + \frac{1}{p}$ mit dem positiven reellen Parameter p.

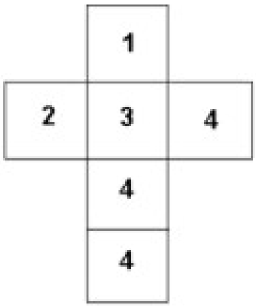
   a) Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen für $p = \frac{1}{2}$ und $p = \frac{3}{2}$ im Intervall [0,2] in ein Koordinatensystem und **berechnen** Sie die Koordinaten des Schnittpunktes der beiden Graphen.
   b) Der Graph von f_p schliesst mit den Koordinatenachsen und der Geraden mit Gleichung $x = 2$ eine Fläche ein. Berechnen Sie den Flächeninhalt in Abhängigkeit von p.
   c) Für welches p hat die Fläche von Aufgabe b) minimalen Inhalt?
   d) Rotiert man das Flächenstück von Aufgabe b) um die x-Achse, so entsteht ein Rotationskörper. Berechnen Sie für allgemeines p das Volumen des Körpers.

4. Gegeben sind die drei Würfel A, B und C.

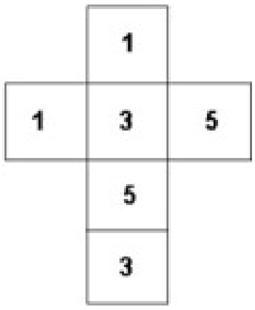
A:



B:



C:



Man würfelt nun gleichzeitig mit diesen drei Würfeln und notiert die grösste der drei gewürfelten Ziffern.

   a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass man 1 als grösste Ziffer notiert hat?
   b) Zeigen Sie: Die Wahrscheinlichkeit, dass 5 die grösste Ziffer ist, beträgt $\frac{7}{18}$.
   c) Man habe 4 als grösste Ziffer notiert. Mit welcher Wahrscheinlichkeit zeigte der Würfel A eine '4'?
   d) Diese grösste der drei gewürfelten Ziffern wird als Zufallsvariable X betrachtet. Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X an.
   e) Wie gross ist der Erwartungswert von X?
   f) Die drei Würfel werden nun zehnmal geworfen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass dabei genau viermal die 5 als grösste Ziffer auftritt.

5. Drei unabhängige Kurzaufgaben

   a) Geben Sie die Gleichung eines Kreises k mit Mittelpunkt M(1/-4) an, so dass der Punkt P(-8/5) auf k liegt. Berechnen Sie den Radius von k und bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente t in P an k.

   b) Für welche Werte des Parameters n berührt die Gerade mit der Gleichung $y = \sqrt{3}\,x + n$ den Kreis k: $x^2 + y^2 = 100$?

   c) Gegeben ist die nicht abbrechende geometrische Reihe $1 + (x - 1) + (x - 1)^2 + \ldots$
      c1) Für welche Werte von x konvergiert diese Reihe?
      c2) Wie gross ist dann - in Abhängigkeit von x - die Summe s dieser Reihe?
      c3) Welche Zahlenwerte kann diese Summe s für die bei c1) berechneten Werte von x annehmen?