Schriftliche Maturitätsprüfung 2010

Kantonsschule Reussbühl

Fach	*Grundlagenfach Mathematik*
Prüfende Lehrpersonen	*Rita Barmet-Bajor Bernhard Berchtold Peter Büchel Hannes Ernst Felix Huber Roland Reichmuth*
Klassen	*6a / 6b / 6c / 6d / 6e / 6f / 6K*
Prüfungsdatum	*Montag, 31. Mai 2010*
Prüfungsdauer	*3 Stunden*
Erlaubte Hilfsmittel	*Fundamentum Mathematik und Physik Taschenrechner TI 83+ bzw. TI voyage200*
Anweisungen zur Lösung der Prüfung	*Bei jeder Aufgabe muss ein formaler Lösungsweg angegeben werden.*
Anzahl erreichbarer Punkte	*Aufgabe 1: 10 Aufgabe 2: 10 Aufgabe 3: 10 Aufgabe 4: 10 <u>Aufgabe 5: 10</u> Total: 50 Für 44 Punkte wird die Note 6 erteilt (Notenskala linear)*
Anzahl Seiten (inkl. Titelblatt)	*4*

1. Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = \frac{1}{9}x^3 - x^2$

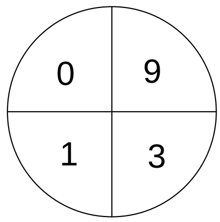
   a) Untersuchen Sie den Graphen von f auf sein Verhalten für $x \to \pm\infty$.
   Bestimmen Sie die Nullstellen, Extremal- und Wendepunkte. *(3 Punkte)*

   b) Geben Sie die Gleichung der Wendetangente an und bestimmen Sie deren Schnittpunkte mit der x- und y-Achse. *(2 Punkte)*

   c) Der Ursprung und die unter Aufgabe b) bestimmten Achsenschnittpunkte bilden die Eckpunkte eines Dreiecks. In dieses ist ein Rechteck mit maximalem Flächeninhalt einzuschreiben. Berechnen Sie diesen Inhalt. *(2 Punkte)*

   d) Sei nun die Funktionenschar f_a gegeben durch $f_a(x) = ax^3 - x^2$ mit $a \in \mathbb{R}^+$.
   Wie lautet die Koordinatengleichung der Kurve, auf der alle Tiefpunkte der Schar f_a liegen? *(3 Punkte)*

2. Für einen Einsatz von 3 Franken darf man an folgendem Spiel teilnehmen.
   Ein Glücksrad mit vier gleich grossen Feldern, worauf die Zahlen 0, 1, 3, 9 zu lesen sind, wird zweimal gedreht. Die Auszahlung entspricht dem Produkt der beiden erhaltenen Zahlen, im schlechtesten Fall 0 Franken, im besten Fall 81 Franken.



   a) Die Zufallsvariable X ordnet jedem möglichen Spielergebnis den Gewinn bzw. Verlust (Auszahlung - Einsatz) zu. Untersuchen Sie, welche Werte X annehmen kann und stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X auf. *(3 Punkte)*

   b) Berechnen Sie den Erwartungswert von X. *(1 Punkt)*

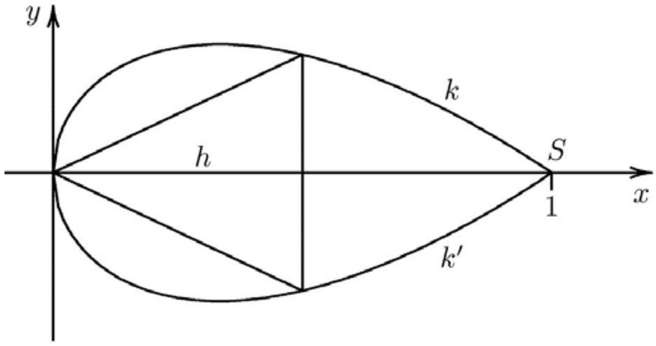
   c) Wie wahrscheinlich ist es, dass der Zeiger bei einmaligem Spieldurchgang keinmal die Null zeigt? *(1 Punkt)*

   d) Jemand hat 9 Franken als Auszahlung erhalten. Wie wahrscheinlich ist es, dass er diesen Betrag durch das Ereignis „1. Drehung zeigt 3 und 2. Drehung zeigt 3“ erhalten hat? *(1 Punkt)*

   e) Man spielt das Spiel zehn Mal.
   A: Wie wahrscheinlich ist es, dass man genau dreimal Fr. 27.- ausbezahlt bekommt?
   B: Wie wahrscheinlich ist es, dass man die ersten 3 Durchgänge Fr. 27.- ausbezahlt bekommt und die restlichen Male nichts? *(2 Punkte)*

   f) Wie oft muss man beim Spiel mitmachen, damit man mit mindestens 90-prozentiger Wahrscheinlichkeit wenigstens einmal Fr. 27.- erhält? *(2 Punkte)*

3. Die folgende Skizze zeigt die Kurve k der Funktion mit Gleichung $f(x) = (1-x)\cdot\sqrt{x}$ im Intervall $0 \le x \le 1$. Diese Kurve k bildet zusammen mit ihrem Spiegelbild k' eine zur x-Achse symmetrische Figur.



a) Wie gross ist der Schnittwinkel von k und k' in S? *(2 Punkte)*
b) Welches ist die grösste Breite dieser Figur (parallel zur y-Achse gemessen)? *(2 Punkte)*
c) Berechnen Sie den Inhalt der von k und k' eingeschlossenen Fläche. *(2 Punkte)*
d) Bei der Rotation der Fläche von c) um die x-Achse entsteht ein tropfenförmiger Körper. Wie gross ist sein Volumen? *(1 Punkt)*
e) Diesem Körper wird ein Kreiskegel mit der Spitze im Ursprung und der Höhe h auf der x-Achse einbeschrieben (vgl. Skizze). Für welche Höhe h wird das Volumen des Kegels maximal? *(3 Punkte)*

4. Die Punkte A(-2|3|1), B(4|-1|2) und C(1|-2|-3) bilden die Ecken der Grundfläche einer Pyramide. Die Spitze D liegt in der Ebene mit der Gleichung 3x-2y+z-6=0 und steht senkrecht über dem Schwerpunkt der Grundfläche.

a) Berechnen Sie den grössten Dreieckswinkel und den Flächeninhalt des Dreiecks ABC. *(2 Punkte)*
b) Geben Sie die Koordinatengleichung von E = (ABC) an. *(2 Punkte)*
c) Bestimmen Sie den Schwerpunkt der Grundfläche und die Koordinaten von D. *(3 Punkte)*
[Nur zur Kontrolle: D hat die Koordinaten D(-6|-9|6)]

Wer die Aufgabe c) nicht lösen konnte, rechnet für d) und e) mit den in der Kontrolle gegebenen Koordinaten von D.

d) Berechnen Sie die Höhe und das Volumen der Pyramide (Höhe durch D). *(1 Punkt)*
e) Die Gerade g = (AD) wird an der Grundfläche gespiegelt. Bestimmen Sie die Parametergleichung der gespiegelten Geraden g'. *(2 Punkte)*

5. Lösen Sie die drei unabhängigen Teilaufgaben

a) A und B machen ein Spiel, bei dem sie abwechselnd würfeln:
A wirft mit **zwei** Würfeln, B nur mit **einem** Würfel. Wirft A die **Summe** 5, so gewinnt er; wirft B die **Ziffer** 5, so gewinnt er. A beginnt.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt A das Spiel? *(4 Punkte)*

[Beachten Sie, dass das Spiel theoretisch unendlich lange dauern kann]

b) Für welche Werte des Parameters q berührt die Gerade t: $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x + q$

den Kreis k: $x^2 + y^2 = 4$? *(3 Punkte)*

c) Berechnen Sie das bestimmte Integral $\int_1^e x\ln(x)\,dx$ mit Hilfe von partieller Integration.

(e: Euler'sche Zahl) *(3 Punkte)*