Schwerpunktfach Physik und Anwendungen der Mathematik

Lösungen

Aufgabe 1: (5 Punkte)

EES: $m_1 gh = \frac{1}{2} m_1 v_1^{\;2}$ $\quad v_1^{\;2} = 2gh$ (Einpendeln)

IES/EES: $u_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1}{m_1 + m_2}$ für $v_2 = 0$ (Stoss)

Mit $m_1 = 2m_2$ ist $u_1 = \frac{m_2 v_1}{3m_1} = \frac{1}{3} v_1$.

EES: $m_1 g h_1 = \frac{1}{2} m_1 u_1^{\;2}$ $\quad h_1 = \frac{u_1^{\;2}}{2g}$ (Auspendeln)

Aus $u_1^{\;2} = \frac{1}{9} v_1^{\;2} = \frac{1}{9} \cdot 2gh$ folgt

$h_1 = \frac{1}{9} h$.

Aufgabe 2: (6 Punkte)

a)

Grundgesetz der Drehbewegung $J_A \cdot \ddot{\alpha} = M$

rücktreibendes Drehmoment $M = -mg \cdot s \cdot \sin\alpha$

$$J_A \cdot \ddot{\alpha} = -mg \cdot s \cdot \sin\alpha \qquad \ddot{\alpha} + \frac{mgs}{J_A} \sin\alpha = 0 \qquad (1)$$

Für kleine Winkel α gilt die Näherung $\sin\alpha \approx \alpha$.

Die Differentialgleichung (1) geht in die DGL (2)

$$\ddot{\alpha} + \frac{mgs}{J_A} \alpha = 0 \qquad (2)$$

über, deren Lösungen harmonische Funktionen sind.

Bedingungen:

- kleine Ausschläge (kleiner 10°)
- keine Reibung im Achslager, keine Luftreibung

b) $J_A = \frac{1}{12} ml^2 + m\left(\frac{1}{4} l\right)^2 = \frac{1}{12} ml^2 + \frac{1}{16} ml^2 = \frac{7}{48} ml^2$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_A}{mgs}} = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{7}{48} ml^2}{mg \frac{1}{4} l}} = 2\pi \sqrt{\frac{7}{12} \frac{l}{g}} \qquad T = 1{,}53 s$$

Aufgabe 3: (8 Punkte)
a) Der Strom durch die Reihenschaltung aus R, L und C ist maximal, wenn ihr Wechselstromwiderstand minimal ist. Dies ist bei f = 600 Hz der Fall;
dann gilt insbesondere $X_L = X_C$ und Z = R.

$$R = \frac{U_{eff}}{I_{eff}} \qquad R = \frac{1{,}00V}{0{,}0085A} = 118\Omega$$

$$X_L = X_C \qquad \omega L = \frac{1}{\omega C} \qquad L = \frac{1}{(2\pi f)^2 C} \qquad L = \frac{1}{\left(2\pi \cdot 600\frac{1}{s}\right)^2 \cdot 2 \cdot 10^{-6}\frac{As}{V}} = 35{,}2mH$$

b)

$$Z_1 = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \qquad Z_1 = \sqrt{118^2 + \left(2\pi \cdot 200 \cdot 0{,}0352 - \frac{1}{2\pi \cdot 200 \cdot 2 \cdot 10^{-6}}\right)^2}\,\Omega = 372{,}8\Omega$$

$$I_{eff} = \frac{U_{eff}}{Z_1} \qquad I_{eff} = \frac{1}{372{,}8}A = 2{,}7mA$$

$$U_R = R \cdot I_{eff} \qquad U_R = 118 \cdot 0{,}0027V = 0{,}32V$$

$$U_L = \omega L \cdot I_{eff} \qquad U_L = 2\pi \cdot 200 \cdot 0{,}0352 \cdot 0{,}0027V = 0{,}12V$$

$$U_C = \frac{1}{\omega C} \cdot I_{eff} \qquad U_C = \frac{0{,}0027}{2\pi \cdot 200 \cdot 2 \cdot 10^{-6}}V = 1{,}07V$$

$$U_R + U_L + U_C = 1{,}51V \neq U_{eff}$$

Teilspannungen sind phasenverschoben und müssen geometrisch addiert werden.

$$\sqrt{U_R^{\,2} + (U_L - U_C)^2} = 1{,}00V$$

Aufgabe 4: (4 Punkte)
a) Die Diode D wird bei geschlossenem Schalter S in Sperrrichtung betrieben, über den Widerstand R fliesst nur der sehr kleine Sperrstrom.
Beim Öffnen des Schalters ändert sich die Stromstärke in der Spule und es wird eine Spannung induziert.
Die Induktionsspannung treibt einen Induktionsstrom durch den Stromkreis, der den ausbleibenden Strom fortsetzt. (Gesetz von Lenz: Die Wirkung des Induktionsstromes richtet sich gegen seine Entstehungsursache.) Der Stromkreis besteht jetzt nur noch aus R, der - für den Induktionsstrom - in Durchlassrichtung gepolten D und L.
Die magnetische Feldenergie der Spule wird in R als Wärme umgesetzt.

b)

$$U_i = -L\frac{dI}{dt} = -L\frac{d}{dt}\left(I_0 \cdot e^{-at}\right) \qquad U_i = LaI_0 \cdot e^{-at}$$

Aufgabe 5: (7 Punkte)

a) EES: $eU = \frac{1}{2} m_e v^2$ $U = \frac{m_e}{2e} v^2$ mit $v = 3{,}0 \cdot 10^7 \frac{m}{s}$ $U = 2556{,}0V$

b) Kraftansatz: $evB = \frac{m_e v^2}{r}$ $x = 2r = \frac{2m_e v}{eB}$

aus EES: $v = \sqrt{2\frac{e}{m_e}U}$ $x = \frac{2m_e}{eB}\sqrt{2\frac{e}{m_e}U} = \frac{2}{B}\sqrt{2\frac{m_e}{e}U}$

c) $B = \frac{m_e v}{er} = \frac{2m_e v}{ex}$ $B = 3{,}41 \cdot 10^{-3} \frac{Vs}{m^2} = 3{,}41mT$

Aufgabe 6: Differentialgleichung (4 Punkte)

Allg. Lösung: $y' = y^2 \cdot x \cdot \sin(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y^2 \cdot x \cdot \sin(x) \Rightarrow \int \frac{1}{y^2} dy = \int x \cdot \sin(x)\, dx$

$\int \frac{1}{y^2} dy = -\frac{1}{y}$ $(+C, C \in \mathbb{R})$,

$\int x \cdot \sin(x)\, dx = x \cdot (-\cos(x)) - \int 1 \cdot (-\cos(x)) dx = -x \cdot \cos(x) + \int \cos(x)\, dx$

$= -x \cdot \cos(x) + \sin(x) + C, C \in \mathbb{R} \Rightarrow -\frac{1}{y} = \sin(x) - x \cdot \cos(x) + C, C \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow y = \frac{1}{x \cdot \cos(x) - \sin(x) + C}, C \in \mathbb{R}$

$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{0-1+C} \Rightarrow C - 1 = 2 \Rightarrow C = 3 \Rightarrow y = \frac{1}{x \cdot \cos(x) - \sin(x) + 3}$ 4 P

Aufgabe 7: Raumgeometrie (7 Punkte)

a) $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{n})$ ist ein Rechtssystem.

$\Rightarrow \vec{m} = k \cdot \vec{n}$ mit $k > 0 \Rightarrow k = \frac{m}{n} = \frac{r}{\sqrt{4+1}} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 2$

$\Rightarrow \vec{m} = \overrightarrow{OM} = 2 \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow K: (x-4)^2 + y^2 + (z-2)^2 = \left(2\sqrt{5}\right)^2 = 20$

$\vec{n}$ Normalvektor von T und $O \in T \Rightarrow T: 2x + z = 0$ 3 P

b) $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{n}$ sind Richtungsvektoren von N, also z.B.

$\vec{n}_N = \vec{n} \times \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow N: x + y - 2z + d = 0$

$Q \in N \Rightarrow -6 + 0 - 0 + d = 0 \Rightarrow d = 6 \Rightarrow N: x + y - 2z + 6 = 0$ 2 P

c) Normale zur Ebene N durch M: $n_N: \vec{r} = \overrightarrow{OM} + t \cdot \vec{n}_N = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$n_N \cap N \to M_1$: $4 + t + t - 2(2 - 2t) + 6 = 0 \Leftrightarrow 6t + 6 = 0 \Leftrightarrow t = -1$

$\Rightarrow \overrightarrow{OM_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow M_1(3|-1|4)$

$$r_1 = \sqrt{r^2 - \overline{MM_1}^2} = \sqrt{(2\sqrt{5}\,)^2 - ((-1)^2 + (-1)^2 + 2^2)} = \sqrt{20 - 6} = \sqrt{14}$$

(mit $N: -x - y + 2z - 3 = 0$: $\vec{n}_N = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $n_N: \vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$n_N \cap N$: $4 - t - t - 2(2 + 2t) - 3 = 0 \Leftrightarrow t = -0.5 \Rightarrow M_1(3.5|-0.5|3)$

$r_1 = \sqrt{r^2 - \overline{MM_1}^2} = \sqrt{20 - (0.25 + 0.25 + 1)} = \sqrt{20 - 1.5} = \sqrt{18.5}$) 2 P

Aufgabe 8: Komplexe Funktionen (9 Punkte)

a) $f(z)=0 \Leftrightarrow z^3+2z=0 \Leftrightarrow z(z^2+2)=0 \Leftrightarrow z=0$ oder $\Leftrightarrow z^2=-2$
Nullstellen von f: $z_0=0$, $z_1=\sqrt{2}i$, $z_2=-\sqrt{2}i$
$g(z)=0 \Leftrightarrow 2z-i=0$, Nullstelle von g: $z_3=\frac{i}{2}$ 2 P

b) $f(z)=g(z) \Leftrightarrow z^3+2z=2z-i \Leftrightarrow z^3=-i=e^{270°\cdot i}$
Schnittstellen: $z_4=e^{90°\cdot i}$, $z_5=e^{(90+120°)\cdot i}=e^{210°\cdot i}$, $z_6=e^{(90+240°)\cdot i}=e^{330°\cdot i}$
$z_4=e^{90°\cdot i}=i$, $z_5=e^{210°\cdot i}=\cos(210°)+\sin(210°)\cdot i=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\cdot i$,
$z_6=e^{330°\cdot i}=\cos(330°)+\sin(330°)\cdot i=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\cdot i$ 3 P

c) $\Delta q=q_2-q_1=1+i-2i=1-i$, also ist z.B. $p=1+i$ ein Normalvektor zu Δq (als 2-dim. Vektoren gedeutet)
Damit folgt h: $\overline{p}z+p\overline{z}+k=0 \Leftrightarrow (1-i)z+(1+i)\overline{z}+k=0$. Nun z.B. $q_2=2i$ einsetzen: $(1-i)\cdot 2i+(1+i)\cdot(-2i)+k=0 \Leftrightarrow 2i+2-2i+2+k=0 \Leftrightarrow k=4$
$\Rightarrow h: (1-i)z+(1+i)\overline{z}+4=0$
oder: zuerst mit kart. Koord.: Steigung von h: $m_h=\frac{\Delta q_2}{\Delta q_1}=\frac{-1}{1}=-1 \Rightarrow h: y=-x+b \Leftrightarrow$
$x+y-b=0$, mit $z=x+iy$ folgt $x=\frac{z+\overline{z}}{2}$ und $y=\frac{z-\overline{z}}{2i}=-\frac{i}{2}\cdot(z-\overline{z})$
$\Rightarrow h: \frac{1}{2}(z+\overline{z})-\frac{i}{2}\cdot(z-\overline{z}) \ -b=0 \Leftrightarrow z+\overline{z}-i\cdot(z-\overline{z}) \ -2b=0$
$\Leftrightarrow (1-i)\cdot z+(1+i)\cdot\overline{z} \ -2b=0$ Dann wie oben weiter (q_2 einsetzen usw.)
2 P

d) $w=g(z)=2z-i \Rightarrow \frac{w+i}{2}=z=g^{-1}(w)$
$k: |z-2i|=2$
$g(k)$: $\left|\frac{w+i}{2}-2i\right|=2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}|w+i-4i|=2 \Leftrightarrow |w-3i|=4$
$g(k)$ ist ein Kreis mit Mittelpunkt $3i$ und Radius 4. 2 P

Aufgabe 9: Affine Abbildungen (5 Punkte)

a) $A=\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}-4 & -3\\ 3 & -4\end{pmatrix} \Rightarrow a_{11}=a_{22}, a_{12}=-a_{21}$, $|A|=\begin{vmatrix}-\frac{4}{5} & \frac{-3}{5}\\ \frac{3}{5} & -\frac{4}{5}\end{vmatrix}=\frac{16}{25}+\frac{9}{25}=1 \Rightarrow \alpha$ ist eine Drehung
$\tan(\tilde{\varphi})=\frac{3}{-4}=-\frac{3}{4} \Rightarrow \tilde{\varphi}=\arctan\left(-\frac{3}{4}\right)\cong -36.87° \Rightarrow$ Drehw. $\varphi \cong 180°-36.87°=143.13°$
Drehzentrum ist Fixpunkt: $\alpha(\vec{m})=\vec{m} \Rightarrow \frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}-4 & -3\\ 3 & -4\end{pmatrix}\cdot\vec{m}+\begin{pmatrix}-6\\ 6\end{pmatrix}=\vec{m}$
$\Rightarrow \begin{pmatrix}-6\\ 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-(-0.8) & -(-0.6)\\ -0.6 & 1-(-0.8)\end{pmatrix}\cdot\vec{m} \Rightarrow \begin{pmatrix}-6\\ 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1.8 & 0.6\\ -0.6 & 1.8\end{pmatrix}\cdot\vec{m} \Rightarrow$
$\begin{pmatrix}-6\\ 6\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}9 & 3\\ -3 & 9\end{pmatrix}\cdot\vec{m} \Rightarrow 5\cdot\begin{pmatrix}-6\\ 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & 3\\ -3 & 9\end{pmatrix}\cdot\vec{m} \Rightarrow \begin{pmatrix}9 & 3\\ -3 & 9\end{pmatrix}^{-1}\cdot 5\cdot\begin{pmatrix}-6\\ 6\end{pmatrix}=\vec{m}$
$\begin{pmatrix}9 & 3\\ -3 & 9\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{81+9}\cdot\begin{pmatrix}9 & -3\\ 3 & 9\end{pmatrix} \Rightarrow \frac{1}{90}\cdot\begin{pmatrix}9 & -3\\ 3 & 9\end{pmatrix}\cdot 5\cdot\begin{pmatrix}-6\\ 6\end{pmatrix}=\vec{m}$
$\Rightarrow \vec{m}=\frac{1}{18}\cdot\begin{pmatrix}9 & -3\\ 3 & 9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-6\\ 6\end{pmatrix}=\frac{1}{18}\cdot\begin{pmatrix}-72\\ 36\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\ 2\end{pmatrix} \Rightarrow$ Drehzentrum $M(-4|2)$ 3 P

b) $A^{-1}=\left(\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}-4 & -3\\ 3 & -4\end{pmatrix}\right)^{-1}=5\cdot\frac{1}{25}\cdot\begin{pmatrix}-4 & 3\\ -3 & -4\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}-4 & 3\\ -3 & -4\end{pmatrix}$ (oder direkt mit $\cos(-\varphi)=\cos(\varphi)$ und $\sin(-\varphi)=-\sin(\varphi)$)
$\Rightarrow B=k\cdot A^{-1}=10\cdot\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}-4 & 3\\ -3 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8 & 6\\ -6 & -8\end{pmatrix} \Rightarrow \beta: \vec{x} \mapsto \begin{pmatrix}-8 & 6\\ -6 & -8\end{pmatrix}\cdot\vec{x}$ 2 P

Aufgabe 10: Taylor-Reihe (5 Punkte)

a) $f(x) = x - e^{-x}$, $f'(x) = 1 + e^{-x}$, $f''(x) = -e^{-x}$
$\Rightarrow f(0) = -1$, $f'(0) = 2$, $f''(0) = -1 \Rightarrow a_0 = \frac{-1}{0!} = -1$, $a_1 = \frac{2}{1!} = 2$, $a_2 = \frac{-1}{2!} = -\frac{1}{2}$
$\Rightarrow p_2(x_0 + h) = p_2(h) = -1 + 2h - \frac{1}{2}h^2$ oder $p_2(x) = -1 + 2x - \frac{1}{2}x^2$ 2 P

b) $p_2(x) = 0 \Leftrightarrow -1 + 2x - \frac{1}{2}x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 2 = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-8}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}$
$\Rightarrow x_1 = 2 - \sqrt{2} \cong 0.585786$ ... 1 P
$\Rightarrow f(x_1) = f\left(2 - \sqrt{2}\right) = 2 - \sqrt{2} - e^{-2+\sqrt{2}} \cong 0.0291$ ...

c) $f'''(x) = e^{-x}$, $f^{(4)}(x) = -e^{-x}$, $\ldots \Rightarrow f^{(i)}(x) = (-1)^{i-1} \cdot e^{-x}$ für $i \geq 2$
$f^{(i)}(0) = (-1)^{i-1}$ für $i \geq 2 \Rightarrow a_i = \frac{(-1)^{i-1}}{i!}$ für $i \geq 2$
$\Rightarrow p(x_0 + h) = p(h) = -1 + 2h + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i!} h^i$ oder
$p(x) = -1 + 2x + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i!} x^i$
Konv.bereich: $\lim_{i \to \infty} \left|\frac{a_{i+1}}{a_i}\right| = \lim_{i \to \infty} \left|\frac{(-1)^i \cdot i!}{(i+1)! \cdot (-1)^{i-1}}\right| = \lim_{i \to \infty} \frac{1}{i+1} = 0 \Rightarrow R = \infty$
$\Rightarrow \mathbb{D} = \mathbb{R}$ 2 P