Schwerpunktfach Physik und Anwendungen der Mathematik

Lösungen

Aufgabe 1: (5 Punkte)

a) $\frac{1}{2}mv^2 = G\frac{m_p \cdot m}{r_p} \rightarrow m_p = \frac{v^2 \cdot r_P}{2G}$ = 2·10^27 kg (1.5P)

b) $m \cdot g = G\frac{m_P \cdot m}{r_p^2} \rightarrow g = G\frac{m_P}{r_p^2}$ = 27.2 m/s² (1.5P)

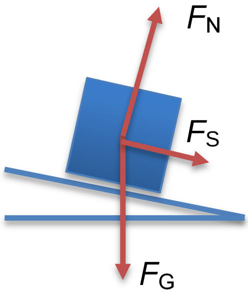
c) $m_M \omega^2 r = G\frac{m_P \cdot m_M}{r^2}$

$\omega = \frac{2\pi}{T} \rightarrow \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot r = G\frac{m_P}{r^2}$

$\rightarrow T = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot r^3}{G \cdot m_p}}$ = 1'425'578 s = 16.5 d (2P)

Aufgabe 2: (4 Punkte)

a) F_G: Gewichtskraft; F_N: Normalkraft;
F_S: Schienenkraft (abhängig von v); (1.5P)



b) $\tan(\alpha) = \frac{F_Z}{F_g} = \frac{mv^2}{mgr} = \frac{v^2}{gr}$

$\sin(\alpha) = \frac{0.15}{1.435} \rightarrow \alpha = 6°$

$\rightarrow v$ = 26.9 m/s (2.5P)

Aufgabe 3: (6 Punkte)

a) $Q = C \cdot U = 4.5 \cdot 10^{-8}$ C 1P

b) $C = \frac{\varepsilon_0 \cdot A}{d} \rightarrow d = \frac{\varepsilon_0 \cdot A}{C}$ = 1.18 mm 1.5P

c) $E = \frac{1}{2}CU^2 = 6.75 \cdot 10^{-6}$ J 1P

d) $E = \frac{1}{2}C(U_1^2 - U_2^2) = 6.0 \cdot 10^{-6}$ J

$\frac{1}{2}mv^2 = E \rightarrow v = \sqrt{\frac{2E}{m}}$ = 2.4 cm/s 2.5P

Aufgabe 4: (6 Punkte)

a)

$$q \cdot v \cdot B = \frac{m \cdot v^2}{r} \quad \Rightarrow \quad q \cdot B = \frac{p}{r} \quad \Rightarrow$$

$$B = \frac{p}{r \cdot q} \quad \Rightarrow \quad B = \frac{3,2 \cdot 10^{-17}}{1,5 \cdot 10^3 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}\,\mathrm{T} = 0,13\mathrm{T}$$

(2P)

b)

Relativistische Energie-Impulsbeziehung: $E^2 - p^2 \cdot c^2 = E_0^2$;

$$\left(m \cdot c^2\right)^2 = \left(m_0 \cdot c^2\right)^2 + p^2 \cdot c^2 \quad | : c^4 \quad \Rightarrow \quad m^2 = m_0^2 + \frac{p^2}{c^2}$$

$$m = \sqrt{m_0^2 + \frac{p^2}{c^2}} \quad \Rightarrow \quad m = \sqrt{\left(9,1 \cdot 10^{-31}\right)^2 + \left(\frac{3,2 \cdot 10^{-17}}{3,0 \cdot 10^8}\right)^2}$$

$\Rightarrow m = 1.1 \cdot 10^{-25}$ kg $= 1.2 \cdot 10^5\, m_0$ (3P)

c) $E_{\mathrm{kin}} = E - E_0 = (m - m_0) \cdot c^2 = 9.9 \cdot 10^{-9}$ J (1P)

Aufgabe 5: (9 Punkte)

a) $N_1(t) = C \cdot e^{-\lambda_1 t}$

$N_1(0) = N_0 \rightarrow C = N_0$ (2P)

b)

$$\frac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}t} = -\lambda_2 N_2 + \lambda_1 N_1$$

$$\frac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}t} + \lambda_2 N_2 = \lambda_1 N_0\, \mathrm{e}^{-\lambda_1 t}$$

(2P)

c)

- Lösung der <u>homogenen</u> Gleichung durch Trennung der Variablen

$$\frac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}t} = -\lambda_2 N_2 \longrightarrow N_2(t) = A\, \mathrm{e}^{-\lambda_2 t}$$

- Variation der Konstanten

$$N_2(t) = u(t)\, \mathrm{e}^{-\lambda_2 t}$$

- Einsetzen in inhomogene Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\, \mathrm{e}^{-\lambda_2 t} - \lambda_2 u(t)\, \mathrm{e}^{-\lambda_2 t}$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\, \mathrm{e}^{-\lambda_2 t} - \cancel{\lambda_2 u\, \mathrm{e}^{-\lambda_2 t}} + \cancel{\lambda_2 u\, \mathrm{e}^{-\lambda_2 t}} = \lambda_1 N_0\, \mathrm{e}^{-\lambda_1 t}$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \lambda_1 N_0\, \mathrm{e}^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}$$

(2P)

- Integration

$$u(t) = \frac{\lambda_1 N_0}{\lambda_2 - \lambda_1}\, \mathrm{e}^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} + C$$

- Lösung

$$N_2(t) = u(t)\, \mathrm{e}^{-\lambda_2 t} = \frac{\lambda_1 N_0}{\lambda_2 - \lambda_1}\, \mathrm{e}^{-\lambda_1 t} + C\, \mathrm{e}^{-\lambda_2 t}$$

  Nun erhalten wir mit den Anfangsbedingungen

$$N_2(0) = \frac{\lambda_1 N_0}{\lambda_2 - \lambda_1} + C \stackrel{!}{=} 0 \rightarrow C = -\frac{\lambda_1 N_0}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

  die <u>spezielle Lösung</u>

$$\underline{N_2(t) = \frac{\lambda_1 N_0}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(\mathrm{e}^{-\lambda_1 t} - \mathrm{e}^{-\lambda_2 t}\right).}$$

(3P)

Aufgabe 6: (7 Punkte)

a) $\mathbb{D}_f = \mathbb{C}\backslash\{-4i\}$, $\mathbb{D}_g = \mathbb{C}\backslash\{-1\}$ 1P

b) $f(z) = g(z) \Leftrightarrow \frac{2z}{z+4i} = \frac{2}{z+1} \Rightarrow 2z^2 + 2z = 2z + 8i \Leftrightarrow z^2 = 4i = 4e^{i\cdot\frac{\pi}{2}}$

$\Leftrightarrow z_1 = 2e^{i\cdot\frac{\pi}{4}} = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$, $z_2 = -z_1 = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$ 2P

c) Fixpunkte von f: $z = \frac{2z}{z+4i} \Rightarrow z^2 + 4iz = 2z \Leftrightarrow z^2 - (2-4i)z = 0$

$\Leftrightarrow z = 0$ oder $z = 2 - 4i \Rightarrow p_1 = 0$, $p_2 = 2 - 4i$ 1P

d) $\Delta p = p_2 - p_1 = 2 - 4i$, also ist z.B. $n_l = 2 + i$ ein Normalvektor zu Δp (als 2-dim. Vektoren gedeutet).

Damit folgt $l: \overline{n_l}z + n_l\overline{z} + k = 0 \Leftrightarrow (2-i)z + (2+i)\overline{z} + k = 0$.

Da. $p_1 = 0$ ist, folgt $k = 0 \Rightarrow l: (2-i)z + (2+i)\overline{z} = 0$ 1P

e) $w = g(z) = \frac{2}{z+1} \Rightarrow z = \frac{2}{w} - 1 = g^{-1}(w)$, $k: |z - z_S| = 2 \Leftrightarrow |z| = 2 \Leftrightarrow z \cdot \overline{z} = 4$

$g(k)$: $\left|\frac{2}{w} - 1\right| = 2 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{w} - 1\right)\left(\frac{2}{\overline{w}} - 1\right) = 4 \Leftrightarrow \frac{4}{w\overline{w}} - \frac{2}{w} - \frac{2}{\overline{w}} + 1 = 4$

$\Leftrightarrow \frac{4}{w\overline{w}} - \frac{2}{w} - \frac{2}{\overline{w}} - 3 = 0 \Rightarrow 4 - 2\overline{w} - 2w - 3w\overline{w} = 0$

$\Leftrightarrow w\overline{w} + \frac{2}{3}\overline{w} + \frac{2}{3}w - \frac{4}{3} = 0 \Leftrightarrow (w + \frac{2}{3})(\overline{w} + \frac{2}{3}) - \frac{4}{9} - \frac{4}{3} = 0 \Leftrightarrow \left(w + \frac{2}{3}\right)\left(\overline{w} + \frac{2}{3}\right) = \frac{16}{9}$

$\Leftrightarrow \left|w + \frac{2}{3}\right| = \frac{4}{3}$ Kreis mit Mittelpunkt $m = -\frac{2}{3}$ und Radius $r = \frac{4}{3}$. 2P

Aufgabe 7: (7 Punkte)

a) $K: (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 6^2 = 36$ 1P

b) $(3+1)^2 + (0-2)^2 + (z_P - 3)^2 = 36 \Leftrightarrow (z_P - 3)^2 = 16 \Leftrightarrow |z_P - 3| = 4$

$\Rightarrow z_P = 7$, da $z_P > 0 \Rightarrow P(3|0|7)$ 1P

c) $\vec{n}_T$ kollinear zu $\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, z.B. $\vec{n}_T = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow T: 2x - y + 2z + k = 0$

$P \in T \Rightarrow 6 - 0 + 14 + k = 0 \Rightarrow k = -20 \Rightarrow T: 2x - y + 2z - 20 = 0$ 2P

d) $\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}_T \times \vec{n}_E = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, also z.B. $\vec{a}_s = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ 1P

e) $g: \vec{r} = \overrightarrow{OM} + t \cdot \vec{a}_s = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$K \cap g$: $(-1 + t + 1)^2 + (2-2)^2 + (3 - t - 3)^2 = 36 \Rightarrow 2t^2 = 36 \Rightarrow t = \pm 3\sqrt{2}$

$\overrightarrow{OS_{1/2}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \pm 3\sqrt{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow S_1(-1 - 3\sqrt{2}|2|3 + 3\sqrt{2})$, $S_2(-1 + 3\sqrt{2}|2|3 - 3\sqrt{2})$ 2P

Aufgabe 8: (6 Punkte)

a) Charakt. Gleichung: $\lambda^2 + u \cdot \lambda + \left(u - \frac{3}{4}\right) = 0$

Diskriminante: $D = u^2 - 4\left(u - \frac{3}{4}\right) = u^2 - 4u + 3$ muss grösser als Null sein:

$u^2 - 4u + 3 > 0 \Leftrightarrow (u-1)(u-3) > 0 \Leftrightarrow u < 1$ oder $u > 3$ 2P

b) $\lambda^2 - \frac{3}{4} = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1/2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow y_1 = e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}x}$, $y_1 = e^{\frac{\sqrt{3}}{2}x}$

$\Rightarrow y = C_1 e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}x} + C_2 e^{\frac{\sqrt{3}}{2}x}, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ 2P

c) Die „Störfunktion" $s(x) = e^{-x}$ ist von exponentiellem Typ

$\Rightarrow$ Ansatz: $y_p = k \cdot e^{-x} \Rightarrow y_p' = -k \cdot e^{-x}$, $y_p'' = k \cdot e^{-x}$

In DGL einsetzen: $y_p'' - \frac{3}{4} \cdot y_p = e^{-x} \Leftrightarrow k \cdot e^{-x} - \frac{3}{4} \cdot k \cdot e^{-x} = e^{-x} \Leftrightarrow \frac{1}{4} \cdot k = 1$

$\Leftrightarrow k = 4 \Rightarrow y_p = 4e^{-x} \Rightarrow y_{allg.} = C_1 e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}x} + C_2 e^{\frac{\sqrt{3}}{2}x} + 4e^{-x}, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ 2P

Aufgabe 9: (5 Punkte)

a) $f'(x) = \left(cos^2(x)\right)' = 2\cos(x)\,(-\sin(x)) = -2\sin(x)\cos(x)$
Nach dem Additionstheorem des doppelten Winkels gilt
$f'(x) = -2\sin(x)\cos(x) = -\sin(2x)$ 2P

b) $f''(x) = -2\cos(2x)$, $f^{(3)}(x) = 4\sin(2x)$, $f^{(4)}(x) = 8\cos(2x) \Rightarrow a_0 = \frac{f(x_0)}{0!} = \frac{f(0)}{1} =$
$cos^2(0) = 1$, $a_1 = \frac{f'(x_0)}{1!} = \frac{f'(0)}{1} = -\sin(0) = 0$,
$a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!} = \frac{f''(0)}{2} = \frac{-2\cos(0)}{2} = -1$, $a_3 = \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!} = \frac{f^{(3)}(0)}{6} = \frac{4\sin(0)}{6} = 0$
$a_4 = \frac{f^{(4)}(x_0)}{4!} = \frac{f^{(4)}(0)}{24} = \frac{8\cos(0)}{24} = \frac{1}{3}$
$\Rightarrow p_0(x) = p_0(x_0 + h) = 1$, $p_1(x) = p_1(x_0 + h) = 1 + 0 \cdot h = 1$,
$p_2(x) = p_2(x_0 + h) = 1 - h^2 = 1 - x^2$,
$p_3(x) = p_3(x_0 + h) = 1 - h^2 + 0 \cdot h^3 = 1 - x^2$,
$p_4(x) = p_3(x_0 + h) = 1 - h^2 + \frac{1}{3} \cdot h^4 = 1 - x^2 + \frac{1}{3} \cdot x^4$
$\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right) - p_4\left(\frac{\pi}{4}\right) = cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) - \left(1 - \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{\pi}{4}\right)^4\right) \cong 0.5 - 0.509985$
$= -0.009985 \cong -0.01$ 3P

Aufgabe 10: (5 Punkte)

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 4 + 2 = 6 \neq 0 \Rightarrow \alpha$ umkehrbar
α^{-1}: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{x'} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \overrightarrow{x'} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$
$\Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \left(\overrightarrow{x'} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \Rightarrow \vec{x} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\overrightarrow{x'} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$
$\Rightarrow \vec{x} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{x'} - \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{5}{6} \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha^{-1}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2: \vec{x} \mapsto \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ -\frac{5}{6} \end{pmatrix}$ 2P

b) Fixpunkte: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{x} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$
$\Rightarrow \vec{x} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow$ genau ein Fixpunkt $F(-\frac{5}{2} | -\frac{3}{2})$
Eigenwerte und Eingenvektoren der Matrix: $\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -1 & 4-\lambda \end{pmatrix} \cdot \vec{e} = \vec{0}$ mit
$(1 - \lambda) \cdot (4 - \lambda) + 2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$
$\lambda_1 = 2$: $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{e_1} = \vec{0} \overset{z.B.}{\Longrightarrow} \overrightarrow{e_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda_2 = 3$: $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{e_2} = \vec{0} \overset{z.B.}{\Longrightarrow} \overrightarrow{e_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\Rightarrow$ Fixgeraden:
$f_1: \vec{x} = \overrightarrow{OF} + t \cdot \overrightarrow{e_1} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f_2: \vec{x} = \overrightarrow{OF} + t \cdot \overrightarrow{e_2} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
oder $f_1: x - 2y = -\frac{5}{2} + 3 \Leftrightarrow 2x - 4y = 1$, $f_2: x - y = -\frac{5}{2} + \frac{3}{2} \Leftrightarrow x - y = -1$ 3P