1 Differenzialrechnung (4P)

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f''(x) = 6ax + 2b$

$O \in G_f \Longrightarrow d = 0; P \in G_f \Longrightarrow f(1) = \frac{4}{3}; d.h\ a + b + c = \frac{4}{3};$

in P eine waagrechte Tangente $\Longrightarrow \mathrm{f}'(1) = 0$; d. h. $3\mathrm{a} + 2\mathrm{b} + \mathrm{c} = 0$;

$\mathrm{x} = 2$ ist eine Wendestelle $\Longrightarrow \mathrm{f}''(2) = 0$; d. h. $12\mathrm{a} + 2\mathrm{b} = 0$;

$$\left| \begin{array}{r} a + b + c = \frac{4}{3} \\ 3a + 2b + c = 0 \\ 12a + 2b = 0 \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{r} a + b + c = \frac{4}{3} \\ 2a + b = -\frac{4}{3} \\ 12a + 2b = 0 \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{c} c = 3 \\ b = -2 \\ a = \frac{1}{3} \end{array} \right|.$$

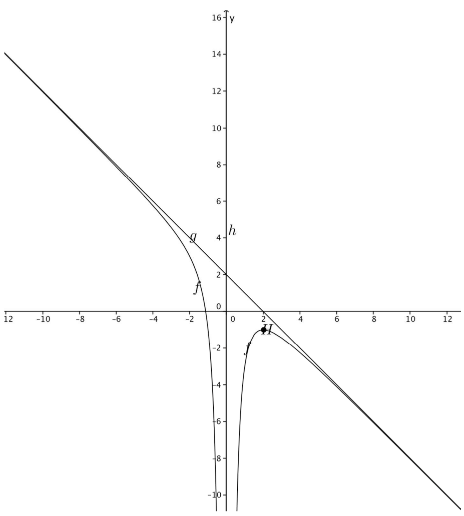
$$f(x) = \frac{1}{3}\, x^3 - 2x^2 + 3x.$$

2 Differenzial-und Integralrechnung (2 P, 2 P, 1 P, 2P)

a) $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
Vertikale Asymptote: $\mathrm{x} = 0$
Schiefe Asymptote: $g(x) = -\mathrm{x} + 2$.

b) $f'(x) = -1 + \frac{8}{x^3}$, $f'(x) = 0$ für $x = 2$.
$f''(x) = -\frac{24}{x^4}$ und $f''(2) = -\frac{3}{2} < 0 \Longrightarrow H(2|-1)$

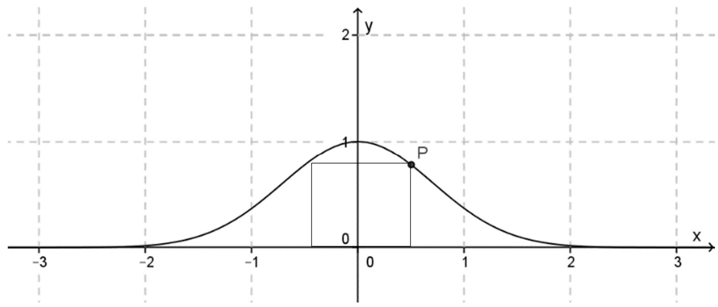
c)



d) $A = \lim_{a\to\infty} \int_2^a \big(g(x) - f(x)\big)dx$

$$A = \lim_{a\to\infty} \int_2^a \left(-\mathrm{x} + 2 - (-\mathrm{x} + 2 - \frac{4}{x^2})\right) dx = \lim_{a\to\infty} \int_2^a \left(\frac{4}{x^2}\right) dx = \lim_{a\to\infty} \left[-\frac{4}{x}\right]_2^a = \lim_{a\to\infty} \left(-\frac{4}{a} + 2\right) = 2.$$

3 Extremwertaufgabe (4P)



$f(x) = e^{-x^2}$

$A(x) = 2x \cdot f(x), x > 0$

$A(x) = 2x \cdot e^{-x^2}$

$A'(x) = 2e^{-x^2} - 4x^2 \cdot e^{-x^2} = 2e^{-x^2}(1 - 2x^2)$

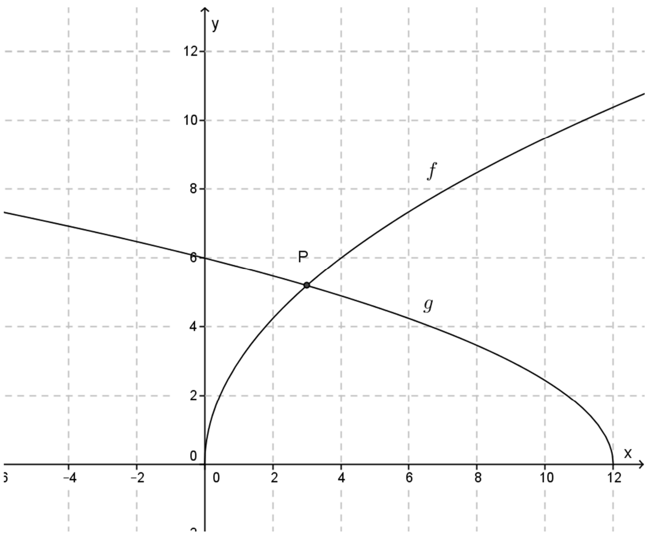
$A''(x) = -4x \cdot e^{-x^2}(1 - 2x^2) - 8x \cdot e^{-x^2} = 4x \cdot e^{-x^2}(2x^2 - 3)$

$A'(x) = 0;\ 2e^{-x^2}(1 - 2x^2) = 0 \Leftrightarrow 1 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{1}{2}}, da\ x > 0;$

$A''\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) < 0\ d.h. f\text{ür}\ x = \sqrt{\frac{1}{2}}\ lok. Max$

$P\left(\sqrt{\frac{1}{2}} \middle| \sqrt{\frac{1}{e}}\right)$ und $P'\left(-\sqrt{\frac{1}{2}} \middle| \sqrt{\frac{1}{e}}\right)$.

4 Integralrechnung (2P, 2P)



a) $Schnittpunkt\ P: 3\sqrt{x} = \sqrt{36 - 3x};$

$9x = 36 - 3x \Leftrightarrow x = 3;\ P\left(3 \middle| 3\sqrt{3}\right).$

b) $V = \pi \int_0^3 f^2(x)dx + \pi \int_3^{12} g^2(x)dx =$

$= \pi \int_0^3 9x dx + \pi \int_3^{12} (36 - 3x)dx =$

$= \pi \left[\frac{9}{2}x^2\right]_0^3 + \pi \left[36x - \frac{3}{2}x^2\right]_3^{12} =$

$= \pi\left(\frac{81}{2} + 12 \cdot 36 - \frac{3 \cdot 144}{2} - 36 \cdot 3 + \frac{27}{2}\right) = 162\pi (V.E).$

5 Folgen und Reihen (2P, 2P)

Alle Steckenlängen in Meter $[m]$

a) $a_1 = 7.50,\ a_2 = 6.00,\ a_3 = 4.80 \Longrightarrow q = \frac{6.00}{7.50} = \frac{4.80}{6.00} = 0.8$ d.h. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ geometrische Folge mit: $a_n = 7.5 \cdot 0.8^{n-1}\ und\ a_{10} = 7.5 \cdot 0.8^9 \approx 1.01.$

b) Es gilt : $a_0 = 7.50,\ a_1 = 6.00,$ q $= 0.8;$ s $= \frac{a_1}{1-q} = \frac{6}{1-0.8} = 30$

Die Gesamtstrecke ist gleich $7.50\ m + 2 \cdot 30\ m = 67.5\ m.$

6 Vektorgeometrie (1P, 1P, 1P, 2P, 2P, 2P)

$A(8|16|0), B(10|6|0), C(20|8|0), S(14|12|12)$

a) $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC};\ \overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 18 \\ 0 \end{pmatrix}; D(18|18|0).$

b) Diagonalenschnittpunkt $M\left(\frac{8+20}{2}\middle|\frac{16+8}{2}\middle|0\right)$; M$(14|12|0)$; $\overrightarrow{MS} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}$, ABCD liegt in der xy-Ebene, $\overrightarrow{MS}$ kollinear zu $\overrightarrow{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ S liegt senkrecht über M (bez. ABCD).

c) $V_{ABCDS} = \frac{(\sqrt{10^2+2^2})^2 \cdot 12}{3} = 4 \cdot 104 = 416 (dm^3).$

d) $\overrightarrow{SA} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ -12 \end{pmatrix}, \overrightarrow{SB} = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ -12 \end{pmatrix}; cos\measuredangle(SA, SB) = \frac{\begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ -12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ -12 \end{pmatrix}}{\sqrt{36+16+144} \cdot \sqrt{16+36+144}} = \frac{24-24+144}{14 \cdot 14} = \frac{144}{196} = \frac{36}{49};$

$\measuredangle(SA, SB) = 42.72^\circ$

e) Ebene durch B, C und S

$\vec{r} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + s' \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t' \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{s} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{t} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\left| \begin{array}{l} x = 10 + 5s + 2t \\ y = 6 \quad + s + \quad 3t \\ z = \qquad\qquad 6t \end{array} \right|; x - 5y = -20 - 13t\ und\ t = \frac{z}{6} \Rightarrow 6x - 30y + 13z + 120 = 0.$

f) Lichtstrahl von $L(0|0|36)$ durch $S(14|12|12)$

$\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 36 \end{pmatrix} + u' \begin{pmatrix} 14 \\ 12 \\ -24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 36 \end{pmatrix} + \mathrm{u} \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix}$

für $z = 0{:}\ 36 - 12u = 0; u = 3; T(21|18|0).$

7 Wahrscheinlichkeitsrechnung (2P, 2P)

a) S kann die Werte 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 annehmen.

$P(S=3) = \mathrm{P}(1|2 \text{ oder } 2|1) = 2 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} = 0.1$, $P(S=4) = \mathrm{P}(1|3, 3|1) = 2 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} = 0.1$,

$P(S=5) = \mathrm{P}(1|4, 4|1, 2|3 \text{ od. } 3|2) = 4 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} = 0.2$, $P(S=6) = \mathrm{P}(1|5, 5|1, 2|4 \text{ od. } 4|2) = 0.2$,

$P(S=7) = \mathrm{P}(2|5, 5|2, 3|4 \text{ od. } 4|3) = 4 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} = 0.2$, $P(S=8) = \mathrm{P}(3|5 \text{ od. } 3|3) = 2 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} = 0.1$,

$P(S=9) = \mathrm{P}(4|5 \text{ od. } 5|4) = 2 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} = 0.1$

s_i	3	4	5	6	7	8	9
$P(S=s_i)$	0.1	0.1	0.2	0.2	0.2	0.1	0.1

b) $\mathrm{P}(S=3) = 0.1$, $\mathrm{P}(S=6) = 0.2$

X kann die Werte 10, 1 oder −8 (in Franken) annehmen

x_i	10	1	−8
$P(X=x_i)$	0.1	0.7	0.2

$\mathrm{E}(X) = 10 \cdot 0.1 + 1 \cdot 0.7 - 8 \cdot 0.2 = 0.1$ (Franken)

8 Wahrscheinlichkeitsrechnung (1P, 1P, 2P)

a) $\mathrm{p} = \left(\frac{5}{6}\right)^4 \cdot \frac{1}{6} \approx 0.08$

b) Binomialverteilung mit $\mathrm{n} = 10$, $\mathrm{p} = \frac{1}{6}$, X = Anzahl „6" − er

$$\mathrm{P}(X=3) = \binom{10}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^7 \approx 0.155$$

c) $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n \geq 0.95 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^n \leq 0.05 \Leftrightarrow n \geq 16.43 \ldots$

Man muss mindestens 17-mal würfeln.

9 Kreis (1P, 3P)

a) $k: x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0 \Rightarrow (x-3)^2 - 9 + (y-2)^2 - 4 - 12 = 0$

$\Rightarrow (x-3)^2 + (y-2)^2 = 25 = 5^2 \Rightarrow M(3|2), r = 5$

b) $m_t = \frac{3}{4} \Rightarrow$ Normale n durch M: $y = -\frac{4}{3}x + b \overset{M(3|2)}{\Longrightarrow} 2 = -4 + b \Rightarrow b = 6, n: y = -\frac{4}{3}x + 6$

$k \cap n: x^2 + \left(-\frac{4}{3}x + 6\right)^2 - 6x - 4\left(-\frac{4}{3}x + 6\right) - 12 = 0$

$\Rightarrow x^2 + \frac{16}{9}x^2 - 16x + 36 - 6x + \frac{16}{3}x - 24 - 12 = 0 \Rightarrow \frac{25}{9}x^2 - \frac{50}{3}x = 0 \Rightarrow \frac{25}{9}x(x-6) = 0$

$\Rightarrow x_B = 6 > 0 \Rightarrow y_B = -\frac{4}{3} \cdot 6 + 6 = -2 \Rightarrow B(6|-2)$