1 Differenzialrechnung (3P, 2P, 3P)

a) $\mathrm{f}_3(\mathrm{x}) = 3x^3 + 9x^2 + 9x$

Nullstellen:

$3x^3 + 9x^2 + 9x = 0 \Leftrightarrow 3x(x^2 + 3x + 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0; N(0|0).$

Extrem- und Wendepunkte:

$f'(x) = 9x^2 + 18x + 9;\ f''(x) = 18x + 18;\ f'''(x) = 18.$

$f'(x) = 0$: $9x^2 + 18x + 9 = 0 \Leftrightarrow 9(x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1;$

$f'(x)$ ändert beim Passieren von $x = -1$ das Vorzeichen nicht $\Rightarrow$ $x = -1$ keine Extremstelle.

$f''(x) = 0$: $18x + 18 = 0 \Leftrightarrow x = -1;$ $f'''(-1) \neq 0 \Rightarrow$ $W(-1|-3)$ Terrassenpunkt.

b) $\mathrm{f}_a(\mathrm{x}) = \mathrm{a}x^3 + 9x^2 + 9x$

$\mathrm{f}_\mathrm{a}'(\mathrm{x}) = 3\mathrm{ax}^2 + 18x + 9$

Man betrachte die Diskriminante der quadratischen Gleichung: $3\mathrm{ax}^2 + 18x + 9 = 0;$

$D = 18^2 - 4 \cdot 3a \cdot 9 = 324 - 108a; D > 0 \Leftrightarrow 324 - 108a > 0 \Leftrightarrow a < 3.$

Für $a < 3$ hat die Funktion f_a zwei Extremstellen.

c) $\mathrm{f}_a(\mathrm{x}) = \mathrm{a}x^3 + 9x^2 + 9x;\ \mathrm{f}_\mathrm{a}'(\mathrm{x}) = 3\mathrm{ax}^2 + 18x + 9;\ \mathrm{f}_\mathrm{a}''(\mathrm{x}) = 6\mathrm{ax} + 18;\ \mathrm{f}_\mathrm{a}'''(\mathrm{x}) = 6\mathrm{a}$

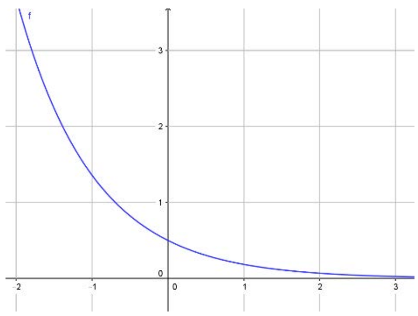
Wendepunkte: $6ax + 18 = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{a};$

$\mathrm{f}_\mathrm{a}'\left(-\frac{3}{a}\right) = -4.5 \Rightarrow 3\mathrm{a}(-\frac{3}{a})^2 + 18\left(-\frac{3}{a}\right) + 9 = -4.5 \Rightarrow a = 2;$ somit $W\left(-\frac{3}{2}\middle|0\right).$

Wendetangente: $t: y = -4.5x - 6.75.$

2 Differenzialrechnung (1P, 3P, 3P)

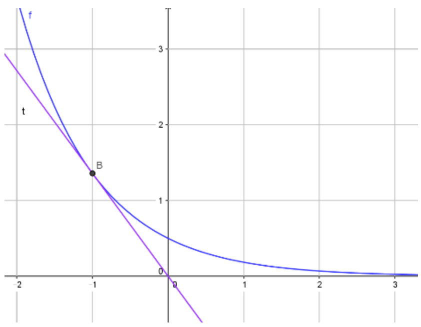
a)

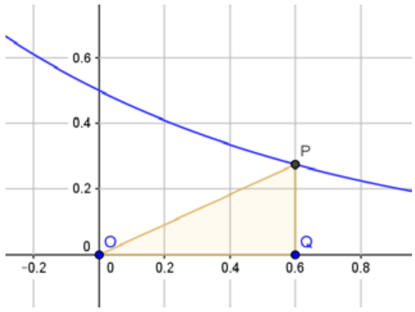


b) $t: y = m_t x;\ f'(x) = -\frac{1}{2}e^{-x}$

$m_t = f'(x_B)$ und $m_t = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_B) - f(0)}{x_B - 0}$ somit $f'(x_B) = \frac{f(x_B)}{x_B};$

$-\frac{1}{2}e^{-x_B} \cdot x_B = \frac{1}{2}e^{-x_B} \Leftrightarrow x_B = -1; B\left(-1\middle|\frac{e}{2}\right).$





c) $A=\frac{1}{2}uf(u)=\frac{1}{4}ue^{-u}$

$A'(u)=\frac{1}{4}(1-u)e^{-u}$; $A''(u)=\frac{1}{4}(u-2)e^{-u}$

$A'(u)=0 \Rightarrow u=1$

$A''(1)=-\frac{1}{4e}<0 \Rightarrow$Maximum für u = 1 $A_{max}=\frac{1}{4e}$

3 Integralrechnung (2P, 2P, 2P)

a) $\int_1^a \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx=4 \Rightarrow \int_1^a x^{-\frac{1}{2}}\,dx=4 \Rightarrow \left[2x^{\frac{1}{2}}\right]_1^a=4 \Rightarrow 2a^{\frac{1}{2}}-2=4 \Rightarrow a^{\frac{1}{2}}=3 \Rightarrow a=9$

b) $F(z)=\int_z^1 x^{-\frac{1}{2}}\,dx=\left[2x^{\frac{1}{2}}\right]_z^1=2-2z^{\frac{1}{2}}=2(1-\sqrt{z})$

$\lim\limits_{z\to 0} F(z)=\lim\limits_{z\to 0} 2(1-\sqrt{z})=2(1-0)=2$

c) $V=\pi\int_1^9 f(x)^2\,dx=\pi\int_1^9\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2\,dx=\pi\int_1^9\frac{1}{x}\,dx=\pi[\ln(x)]_1^9=\pi[\ln(9)-\ln(1)]=\pi\ln(9)$
$\cong 6.9028.$

4 Folgen und Reihen (2P, 2P)

a) $q^3=\frac{a_4}{a_1}; \frac{2(x^2+1)^2}{5x} \div \frac{25x^2}{4(x^2+1)}=\frac{8(x^2+1)^3}{125x^3}; q^3=\frac{8(x^2+1)^3}{125x^3}; q=\frac{2(x^2+1)}{5x}.$

b) Für $x=1$: $q=\frac{4}{5}<1$ d.h. die unendliche geometrische Reihe konvergiert für $x=1$.

$s=\lim\limits_{n\to\infty} s_n=a_1\cdot\frac{1}{1-q}; s=\frac{25}{8}\cdot 5=\frac{125}{8}.$

5 Vektorgeometrie (1P, 2P, 3P, 1P, 2P)

a) $E: -2x+2y+z+d=0$ und Punkt $Q(3|2|1)$, $Q\in E$.

$-6+4+1+d=0 \Rightarrow d=1.$

Somit Ebene $E: -2x+2y+z+1=0.$

b) Durchstosspunkt S der Geraden $g: \vec{r}=\begin{pmatrix}3\\-7\\-8\end{pmatrix}+\mathrm{t}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ mit der xy-Ebene: $z=0;\ -8+t=0; t=8$ somit $S(3|1|0)$.

Schnittwinkel: $sin\alpha=\frac{\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right|}{1\cdot\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha=45^\circ.$

c) $P(3|-7|-8)$ an der Ebene E spiegeln:

Normale n durch P zu E: $n: \vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ -8 \end{pmatrix} + \mathrm{t}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$n \cap E$:

$-2(3-2t) + 2(-7+2t) + (-8+t) + 1 = 0 \Rightarrow 9t - 27 = 0 \Rightarrow t = 3 \Rightarrow D(-3|-1|-5).$

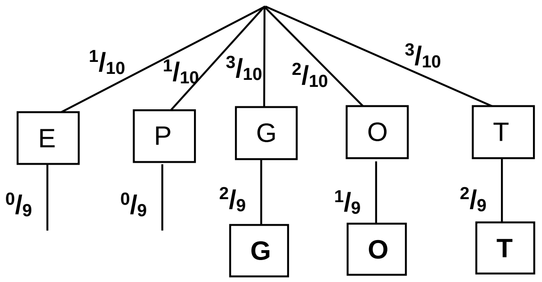
$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{PD}$; $\overrightarrow{OP'} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3-3 \\ -1+7 \\ -5+8 \end{pmatrix}$; $P'(-9|5|-2)$.

d) $\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{QP'} = \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ -9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} = 0$ d.h. das Dreieck PQP' ist rechtwinklig.

e) $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{QP'}$; $\overrightarrow{OR} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ -8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -12 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -10 \\ -11 \end{pmatrix}$; $R(-9|-10|-11)$.

6 Wahrscheinlichkeitsrechnung (2P, 2P, 1P, 2P, 3P)

a)



$P(\text{"2 } gleiche\text{"}) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} + \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} + \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{14}{90} = \frac{7}{45}$

b) $P(\text{"2 gleiche und 2 G's"}) = P(\text{"2 G's"}) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{3}{45}$

$P(\text{"2 G's"}|\text{"2 gleiche"}) = \frac{P(\text{"2 gleiche und 2 G's"})}{P(\text{"2 } gleiche\text{"})} = \frac{\frac{3}{45}}{\frac{7}{45}} = \frac{3}{7}$

c) W'keit, dass ‚T' gezogen wird, wenn jedes Mal zurückgelegt wird: $p = \frac{3}{10}$

X: „Anzahl gezogene ‚T' bei 10 Ziehungen" ist bin.verteilt:

$P(X=6) = \binom{10}{6} \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^6 \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^4 = \frac{10!}{6! \cdot 4!} \cdot 0.3^6 \cdot 0.7^4 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot 0.3^6 \cdot 0.7^4$

$= 210 \cdot 0.3^6 \cdot 0.7^4 \cong 0.0368$

d) W'keit, dass ‚G' gezogen wird, wenn jedes Mal zurückgelegt wird: $p = \frac{3}{10}$

X: „Anzahl gezogene ‚G' bei n Ziehungen" ist bin.verteilt:

$P(X \geq 1) > 0.95 \Leftrightarrow 1 - P(X=0) > 0.95 \Leftrightarrow 0.05 > P(X=0)$

$\left(1 - \frac{3}{10}\right)^n < 0.05 \Leftrightarrow n \cdot ln\left(\frac{7}{10}\right) < \ln(0.05) \Leftrightarrow n > \frac{ln(0.05)}{ln(0.7)} \cong 8.4 \Rightarrow n \geq 9$

e) W'keit, dass ‚O' gezogen wird, wenn jedes Mal zurückgelegt wird: $p = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

X: „Anzahl gezogene ‚O' bei 4 Ziehungen" ist bin.verteilt:

k:	0	1	2	3	4
$P(X = k)$:	$\binom{4}{0} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^0 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^4 = \frac{256}{625}$	$\binom{4}{1} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^1 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{256}{625}$	$\binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{96}{625}$	$\binom{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^1 = \frac{16}{625}$	$\binom{4}{4} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^4 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^0 = \frac{1}{625}$
Gewinn Z (Fr.) z:	$0 - 5 = -5$	$5 - 5 = 0$	$10 - 5 = 5$	$15 - 5 = 10$	$20 - 5 = 15$
$z \cdot P(Z = z)$	$\frac{-5 \cdot 256}{625} = -\frac{1280}{625}$	$\frac{0 \cdot 256}{625} = 0$	$\frac{5 \cdot 96}{625} = \frac{480}{625}$	$\frac{10 \cdot 16}{625} = \frac{160}{625}$	$\frac{15 \cdot 1}{625} = \frac{15}{625}$

$E(Z) = -\frac{1280}{625} + 0 + \frac{480}{625} + \frac{160}{625} + \frac{15}{625} = -\frac{625}{625} = -1 \Rightarrow$ Durchschnittlicher Verlust von 1.- Fr. pro Spiel.