1 Differenzial- und Integralrechnung (4P, 2P)

a) $f(x) = -\frac{1}{9}x^4 + 2x^2$.

Nullstellen:

$$-\frac{1}{9}x^4 + 2x^2 = 0 \iff x^2\left(2 - \frac{1}{9}x^2\right) = 0 \iff x_1 = 0 \lor 2 - \frac{1}{9}x^2 = 0; 2 - \frac{1}{9}x^2 = 0$$
$$\iff \left(x - 3\sqrt{2}\right)\left(x + 3\sqrt{2}\right) = 0 \implies x_2 = -3\sqrt{2} \lor x_3 = 3\sqrt{2}.$$

Extremal- und Wendepunkte:

$$f'(x) = -\frac{4}{9}x^3 + 4x;\ f''(x) = -\frac{4}{3}x^2 + 4;\ f'''(x) = -\frac{8}{3}x.$$

$$f'(x) = 0\text{: } -\frac{4}{9}x^3 + 4x = 0 \iff x\left(4 - \frac{4}{9}x^2\right) = 0 \iff x(x-3)(x+3) = 0 \implies$$

$$x_1 = 0 \lor x_{4,5} = \pm 3;$$

$f''(0) = 4 > 0 \Rightarrow T(0|0); f''(\pm 3) = -8 < 0 \Rightarrow H_1(-3|9)$ und $H_2(3|9)$;

$$f''(x) = 0\text{: } -\frac{4}{3}x^2 + 4 = 0 \iff (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) \implies x_{6,7} = \pm\sqrt{3};$$

$f'''\left(\pm\sqrt{3}\right) \neq 0 \Rightarrow W_1\left(-\sqrt{3}\middle|5\right)$ und $W_2\left(\sqrt{3}\middle|5\right)$

b) $A = 2\int_0^{3\sqrt{2}} f(x)dx = 2\int_0^{3\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{9}x^4 + 2x^2\right)dx = 2\left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{45}x^5\right]_0^{3\sqrt{2}} = \frac{144\sqrt{2}}{5} \approx 40{,}73.$

2 Differenzialrechnung (3P)

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$
Der Graph berührt die x-Achse in $O(0|0)$: $f(0) = 0$ und $f'(0) = 0$ ergibt $d = 0$ und $c = 0$.
Der Graphen hat den Hochpunkt $H(1|1)$: $f(1) = 1$ und $f'(1) = 0$ ergibt $a = -2$ und $b = 3$.
Die gesuchte Funktionsgleichung ist $f(x) = -2x^3 + 3x^2$.

3 Integralrechnung (4P)

$$A(t) = \int_0^t \left(f(x) - g(x)\right)dx = \int_0^t e^{1-x}\,dx = \left[-e^{1-x}\right]_0^t = -e^{1-t} + e.$$

$$\lim_{t\to\infty} A(t) = \lim_{t\to\infty}\left(-e^{1-t} + e\right) = e.$$

4 Differenzialrechnung (2P, 3P)

a) $f(x) = \frac{8(x-1)}{x^2}$; $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; Asymptoten: $x = 0, y = 0$

b) Tangentengleichung: $y = mx$
Berührungspunkt: $B(u|\frac{8(u-1)}{u^2})$
$m_t = f'(u) = \frac{8(2-u)}{u^3}$; $\frac{8(u-1)}{u^2} = \frac{8(2-u)}{u^3} \cdot u \implies u = \frac{3}{2}$; $m_t = f'\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{32}{27}$
Tangentengleichung: $y = \frac{32}{27}x$

5 Vektorgeometrie (2P, 3P, 2P, 2P, 2P)

a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix}, \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}; \ \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{DC}$ sind kollinear ⇒ dass das Viereck $ABCD$ einTrapez ist.

$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow |\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{90}$ ⇒ das Viereck $ABCD$ ein gleichschenkliges Trapez ist.

b) $g = (AD): \vec{r} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathrm{t}\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}; h = (BC): \vec{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix} + \mathrm{s}\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}$

Schnittpunkt S: $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathrm{t}\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix} + \mathrm{s}\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow t = 2 \wedge s = 2;$

somit $S(7|10|15)$.

Schnittwinkel: $cos\alpha = \frac{\left|\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{25+16+49} \cdot \sqrt{1+64+25}} = \frac{5+32+35}{\sqrt{90} \cdot \sqrt{90}} = \frac{4}{5} \Rightarrow \alpha = 36{,}87^\circ$.

c) Mittelpunkte $M_a(1|-2|3)$ und $M_c(4|4|9)$; $h = \overline{M_a M_c} = \left|\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}\right| = 9;$

für m: $\overline{AB} = \sqrt{8^2 + 8^2 + 4^2} = 12; \overline{CD} = \sqrt{4^2 + 4^2 + 2^2} = 6; m = \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2} = \frac{12+6}{2} = 9;$

$A_{ABCD} = m \cdot h = 9 \cdot 9 = 81.$

d) $E: \vec{r} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC}; \ \vec{r} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathrm{t}\begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix} + \mathrm{s}\begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix};$

Somit Ebene $E: 2x + y - 2z + 6 = 0.$

e) $P(6|2|-8)$ an der Ebene E spiegeln:

Normale n durch P zu E: $n: \vec{r} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix} + \mathrm{t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$n \cap E$:

$2(6 + 2t) + (2 + t) - 2(-8 - 2t) + 6 = 0 \Rightarrow 9t + 36 = 0 \Rightarrow t = -4 \Rightarrow D(-2|-2|0).$

$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{PD}; \ \overrightarrow{OP'} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2-6 \\ -2-2 \\ 0+8 \end{pmatrix}; \ P'(-10|-6|8).$

e) $P(6|2|-8)$ an der Ebene $E: -2x + 2y + z = 11$ spiegeln:

Normale n durch P zu E: $n: \vec{r} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix} + \mathrm{t}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$n \cap E$:

$-2(6-2t)+2(2+2t)+(-8+t)-11=0 \Rightarrow 9t-27=0 \Rightarrow t=3 \Rightarrow D(0|8|-5)$.

$\overrightarrow{OP'}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{PD};\ \overrightarrow{OP'}=\begin{pmatrix}0\\8\\-5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0-6\\8-2\\-5+8\end{pmatrix};\ P'(-6|14|-2)$.

6 Folgen und Reihen (2P, 3P)

a) AF: $a_1, a_2, \dots, a_{15}$ mit $d=4$ und $S_{15}=600$;

$S_{15}=(a_1+a_{15})\frac{15}{2}$; $a_{15}=a_1+14\cdot d$;

$600=(a_1+a_1+14\cdot 4)\dfrac{15}{2} \Leftrightarrow 80=2a_1+56 \Leftrightarrow a_1=12$;

Das kürzeste Stück ist 12 cm lang

b) GF: $a_1, a_2, \dots, a_n$, ... mit $S_2=12$ und $s=\lim_{n\to\infty} s_n=16$;

$a_1+a_1\cdot q=12$; $s=\lim_{n\to\infty} s_n=a_1\cdot\frac{1}{1-q}=16 \Rightarrow a_1=16(1-q)$;

$16(1-q)+16(1-q)\cdot q=12 \Leftrightarrow 16q^2-4=0 \Leftrightarrow (2q-1)(2q+1)=0$;

für $q=\frac{1}{2}\ a_1=8$ und für $q=-\frac{1}{2}\ a_1=24$;

1. Lösung: $a_n=8\cdot(\frac{1}{2})^{n-1}$;

2. Lösung: $a_n=24\cdot(-\frac{1}{2})^{n-1}$;

7 Wahrscheinlichkeitsrechnung (1P, 1P, 2P)

a) $P(\text{"dreimal die gleiche Augenzahl"})=1\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{1}{36}$.

b) $P(\text{"drei unterschiedliche Augenzahlen "})=1\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{6}=\frac{20}{36}=\frac{5}{9}$.

e) $\text{P("die Summe die Augenzahlen 6 beträgt")}=10\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{5}{108}$.

8 Wahrscheinlichkeitsrechnung (1P, 1P, 2P)

a) $P(\text{"genau drei Perlen"})=\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{120}$.

b) $P(\text{"genau eine Perle"})=3\cdot\frac{3}{10}\cdot\frac{7}{9}\cdot\frac{6}{8}=\frac{\binom{3}{1}\cdot\binom{7}{2}}{\binom{10}{3}}=\frac{63}{120}$.

c)

xi	0	1	2	3
P(X=xi)	$\frac{35}{120}$	$\frac{63}{120}$	$\frac{21}{120}$	$\frac{1}{120}$

$E(X)=\frac{0\cdot 35+1\cdot 63+2\cdot 21+3\cdot 1}{120}=\frac{108}{120}=0.9$.

9 Beurteilende Statistik (3P, 2P)

a) X: Anzahl "schwarz", $n = 100$

$H_0: p = 0.25$, $H_1: p \neq 0.25 \Rightarrow$ zweiseitiger Test: $\alpha = 10\ \% \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 5\ \%$

$V = [0; k_1] \cup [k_2; 100]$

$P(X \leq 17) = 0.0376 = 3.76\ \%$

$P(X \leq 18) = 0.063 = 6.3\ \%$

$\Rightarrow k_1 = 17$

$P(X \geq 32) = 1 - P(X \leq 31) = 1 - 0.9307 = 0.0693 = 6.93\ \%$

$P(X \geq 33) = 1 - P(X \leq 32) = 1 - 0.9554 = 0.0446 = 4.46\ \%$

$\Rightarrow k_2 = 33$

$\Rightarrow V = [0; 17] \cup [33; 100]$

b) X: Anzahl "schwarz", $n = 100$, $p = 0.2$

$\beta' = P(18 \leq X \leq 32) = P(X \leq 32) - P(X \leq 17) = 0.9984 - 0.2712 = 0.7272 = 72.72\%$

mit Verwerfungsbereich $V^* = [0; 20] \cup [30; 100]$:

$\beta' = P(21 \leq X \leq 29) = P(X \leq 29) - P(X \leq 20) = 0.9888 - 0.5595 = 42.93\ \%$