1 Differenzial- und Integralrechnung (1P, 1P)

a) $f'(x) = ((2019-x)^{2019})' = 2019 \cdot (2019-x)^{2018} \cdot (-1) = -2019 \cdot (2019-x)^{2018}$

b) $f(x) = \frac{4x^5-x}{x^2} = 4x^3 - \frac{1}{x}$, z.B. $F(x) = x^4 - \ln|x|$

2 Differenzial- und Integralrechnung (2P, 3P, 3P)

a) Nullstellen: $9 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm 3$, pos. Nullstelle $x_1 = 3$

$f_1{}'(x) = -2x \Rightarrow m_t = f_1{}'(3) = -6 \Rightarrow t: y = -6x + b$

$(3|0) \in t \Rightarrow 0 = -18 + b \Rightarrow b = 18 \Rightarrow t: y = -6x + 18$

b) Nullstellen: $9 - a^2x^2 = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm\frac{3}{a}$

$A(a) = 2\int_0^{\frac{3}{a}} (9 - a^2x^2)\,dx = 2\left[9x - \frac{1}{3}a^2x^3\right]_0^{\frac{3}{a}} = 2\left(\frac{27}{a} - \frac{9}{a} - 0\right) = \frac{36}{a} \overset{!}{=} 9 \Rightarrow a = 4$

c) Hauptbedingung: $A(u,v) = 2uv$

Nebenbedinung: $P(u|v) \in f_{\sqrt{3}} \Leftrightarrow v = 9 - 3u^2$

Zielfunktion: $A(u) = 2u(9 - 3u^2) = 18u - 6u^3$

relative Extrema: $A'(u) = 18 - 18u^2 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow u = 1$, da $u \geq 0$

$A''(u) = -36u \Rightarrow A''(1) < 0 \Rightarrow u = 1$ rel. Maximalstelle

Ränder von $\mathbb{D}_A$: Flächeninhalt bei beiden Rändern gleich Null $\Rightarrow u = 1$ abs. Maximalstelle

$\Rightarrow A_{max} = A(1) = 18 - 6 = 12$

3 Differenzialrechnung (4P)

$f(x) = e^x \cdot (x^2 - 2x)$, $f'(x) = e^x \cdot (x^2 - 2x) + e^x \cdot (2x - 2) = e^x \cdot (x^2 - 2)$

$f''(x) = e^x \cdot (x^2 - 2) + e^x \cdot 2x = e^x \cdot (x^2 + 2x - 2)$

$f'(x) = e^x \cdot (x^2 - 2) \overset{!}{=} 0 \Rightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{2}$

$f''(-\sqrt{2}) = e^{-\sqrt{2}} \cdot (2 - 2\sqrt{2} - 2) = -2\sqrt{2} \cdot e^{\sqrt{2}} < 0$, $f(-\sqrt{2}) = e^{-\sqrt{2}} \cdot (2 + 2\sqrt{2}) \cong 1.174$

$f''(\sqrt{2}) = e^{\sqrt{2}} \cdot (2 + 2\sqrt{2} - 2) = 2\sqrt{2} \cdot e^{\sqrt{2}} > 0$, $f(\sqrt{2}) = e^{\sqrt{2}} \cdot (2 - 2\sqrt{2}) \cong -3.408$

Hochpunkt $H(-\sqrt{2}|1.174)$, Tiefpunkt $T(\sqrt{2}|-3.408)$

4 Integralrechnung (2P, 2P)

a) $A(u) = \int_0^u 4e^{-0.5x}\,dx = [-8e^{-0.5x}]_0^u = -8e^{-0.5u} - (-8) = 8-8e^{-0.5u}$

$A = \lim_{u\to\infty}(8-8e^{-0.5u}) = 8$

b) $V = \pi\int_0^{\ln(4)}(4e^{-0.5x})^2\,dx = \pi\int_0^{\ln(4)} 16e^{-x}\,dx = \pi[-16e^{-x}]_0^{\ln(4)} = \pi\left(-16e^{-\ln(4)} + 16\right)$

$= \pi\left(-16\cdot\frac{1}{4} + 16\right) = 12\pi$

5 Folgen und Reihen (3P)

Die Anzahl Rosen pro Reihe ist eine AF mit $a_1 = 3$ und $d = 2$.

$\Rightarrow s_n = \frac{n}{2}\cdot(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}\cdot(2a_1 + (n-1)d) = \frac{n}{2}\cdot(6 + (n-1)\cdot 2) = \frac{n}{2}\cdot(4+2n) = 2n + n^2$

$s_n = 399 \Rightarrow 2n + n^2 = 399 \Rightarrow n^2 + 2n - 399 = 0 \Rightarrow n_{1/2} = \frac{-2\pm\sqrt{4+1596}}{2} = \frac{-2\pm 40}{2}$

$\Rightarrow n_1 = 19, n_2 = -21 \Rightarrow$ 19 Reihen

6 Vektorgeometrie (2P, 2P, 3P, 3P)

a) Ansatz: $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3-4 \\ 5-1 \\ 5-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow D(1|9|5).$

b) $\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 2-4 \\ 5-1 \\ 4-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\cos(\beta) = \frac{\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{18}} = \frac{2+16+0}{\sqrt{360}} = \frac{18}{6\sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}} \Rightarrow \beta = \arccos\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right) \cong 18.43°$

c) $g: \vec{r} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$; es sei $L \in g \Rightarrow \overrightarrow{OL} = \begin{pmatrix} 2+2t \\ 5-4t \\ 4 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{LP} = \begin{pmatrix} -2-(2+2t) \\ -2-(5-4t) \\ 10-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4-2t \\ -7+4t \\ 6 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{LP} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4-2t \\ -7+4t \\ 6 \end{pmatrix} = 0$

$\Rightarrow 2(-4-2t) - 4(-7+4t) + 0 = 0 \Rightarrow 20 - 20t = 0 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow \overrightarrow{LP} = \begin{pmatrix} -4-2 \\ -7+4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$

$d = |\overrightarrow{LP}| = \sqrt{(-6)^2 + (-3)^2 + 6^2} = \sqrt{81} = 9$

(oder: N Normalebene zu g durch P: $\vec{n}_N = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow N: 2x - 4y + k = 0$

$P(-2|-2|10) \in N \Rightarrow -4 + 8 + k = 0 \Rightarrow k = -4 \Rightarrow N: 2x - 4y - 4 = 0$

$N \cap g = \{L\}: 2(2+2t) - 4(5-4t) - 4 = 0 \Rightarrow -20 + 20t = 0 \Rightarrow t = 1$

$\Rightarrow \overrightarrow{OL} = \begin{pmatrix} 2+2 \\ 5-4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \overrightarrow{LP} = \begin{pmatrix} -2-4 \\ -2-1 \\ 10-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow d = |\overrightarrow{LP}| = 9$)

d) Koord. von H in Gleichung von E einsetzen:

$2 \cdot (-2) + 3 - 2 \cdot 8 - 1 = -4 + 3 - 16 - 1 = -18 \neq 0 \Rightarrow H \notin E$

Normale h zu E durch H: $\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \ h: \vec{r} = \overrightarrow{OH} + t \cdot \vec{n}_E = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$E \cap h = \{S\}: 2(-2+2t) + (3+t) - 2(8-2t) - 1 = 0 \Rightarrow -18 + 9t = 0 \Rightarrow t = 2$

$\Rightarrow \overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} -2+4 \\ 3+2 \\ 8-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{OH'} = \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{HS} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2+2 \\ 5-3 \\ 4-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow H'(6|7|0)$

7 Wahrscheinlichkeitsrechnung (2P, 2P, 1P)

X: „Anzahl Schwarzfahrer" bin.verteilt mit $p = 0.02, \quad q = 0.98, \quad n = 70$

a) $P(X = 3) = \binom{70}{3} \cdot 0.02^3 \cdot 0.98^{67} \approx 0.1131$

b) $P(X \geq 1) > 0.9 \quad \Rightarrow \quad 1 - P(X = 0) > 0.9 \quad \Rightarrow \quad 1 - 0.98^n > 0.9 \quad \Rightarrow \quad 0.1 > 0.98^n$

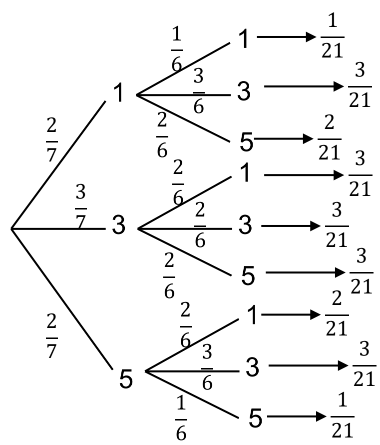
$\Rightarrow \; lg0.1 > n \cdot lg0.98 \quad \Rightarrow \quad \frac{lg0.1}{lg0.98} < n \quad \Rightarrow 113.19 < n \quad \Rightarrow \quad 114 \leq n$

c) $n = 7 \cdot 70 = 490, \; p = 0.02, \quad E(X) = 490 \cdot 0.02 = 9.8$

8 Wahrscheinlichkeitsrechnung (2P, 1P, 2P)

a) A: Diana zieht die gleiche Ziffer wie Hans

$P(A) = \frac{1}{21} + \frac{3}{21} + \frac{1}{21} = \frac{5}{21}$



b) B: Diana zieht (in der 2. Ziehung) die Ziffer 3

$P(B) = \frac{3}{21} + \frac{3}{21} + \frac{3}{21} = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$

c) B: Diana zieht (in der 2. Ziehung) die Ziffer 3

C: Hans zieht (in der 1. Ziehung) die Ziffer 1

$P(C|B) = \frac{P(C \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{21}}{\frac{3}{7}} = \frac{\frac{3}{21}}{\frac{9}{21}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

9 Beurteilende Statistik (3P, 1P)

a) Rechtsseitiger Test mit $\alpha = 0.05$ und $n = 25$.

X: Anzahl PatientInnen, bei denen das Medikament wirkt

$H_0 \colon p \leq 0.7, H_1 \colon p > 0.7$

$P(X \geq 21) = 1 - P(X \leq 20) = 1 - \sum_{k=0}^{20} B_{25,0.7,k} = 1 - (1 - 0.0905) = 0.0905$

$P(X \geq 22) = 1 - P(X \leq 21) = 1 - \sum_{k=0}^{21} B_{25,0.7,k} = 1 - (1 - 0.0332) = 0.0332$

$\Rightarrow V = \{22,23,24,25\}$

b) $P(X \leq 21) = \sum_{k=0}^{21} B_{25,0.9,k} = 0.2364$