1 Differenzialrechnung (3P, 4P)

a) Nullstellen: $-\frac{4}{3}x^3 + 4x^2 = 0 \Leftrightarrow -\frac{4}{3}x^2(x-3) = 0 \Rightarrow \underline{x_1 = 0, x_2 = 3}$

Extremal- und Wendepunkte: $f'(x) = -4x^2 + 8x$, $f''(x) = -8x + 8$, $f'''(x) = -8$

$f'(x) = 0$: $-4x^2 + 8x = 0 \Leftrightarrow -4x(x-2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2$

$f''(0) = 8 > 0 \Rightarrow \underline{T(0|0)}$, $f''(2) = -8 < 0 \Rightarrow \underline{H(2|5.\overline{3})}$

$f''(x) = 0$: $-8x + 8 = 0 \Rightarrow x_1 = 1$

$f'''(1) = -8 \neq 0 \Rightarrow \underline{W(1|2.\overline{6})}$

b) $R(3|0)$; Zielfunktion $A(u,v) = \frac{1}{2}(3-u)\cdot v$

Nebenbedingung: $P(u|v) \in G_f \Leftrightarrow v = f(u) = -\frac{4}{3}u^3 + 4u^2$

$\Rightarrow$ Zielfkt. $A(u) = \frac{1}{2}(3-u)\cdot\left(-\frac{4}{3}u^3 + 4u^2\right) = \frac{1}{2}\left(-4u^3 + 12u^2 + \frac{4}{3}u^4 - 4u^3\right) = \frac{2}{3}u^4 - 4u^3 + 6u^2$

mit $\mathbb{D}_u = [0;3]$

$A'(u) = \frac{8}{3}u^3 - 12u^2 + 12u$, $A''(u) = 8u^2 - 24u + 12$

$A'(u) = 0 \Leftrightarrow \frac{8}{3}u^3 - 12u^2 + 12u = 0 \Leftrightarrow u\left(\frac{8}{3}u^2 - 12u + 12\right) = 0$

$\Leftrightarrow u_1 = 0 \; oder \; u_{2/3} = \frac{12 \pm \sqrt{12^2 - 4\cdot\frac{8}{3}\cdot 12}}{2\cdot\frac{8}{3}} = \frac{12 \pm \sqrt{144-128}}{\frac{16}{3}} = \frac{12 \pm 4}{\frac{16}{3}} = \begin{cases} 3 \\ \frac{3}{2} \end{cases}$

$A''(u_1) = A''(0) = 12 > 0 \Rightarrow$ bei $u_1 = 0$ lokales Minimum von A

$A''(u_2) = A''(3) = 72 - 72 + 12 = 12 > 0 \Rightarrow$ bei $u_2 = 3$ lokales Minimum von A

$A''(u_3) = A''\left(\frac{3}{2}\right) = 18 - 36 + 12 = -6 < 0 \Rightarrow$ bei $u_3 = \frac{3}{2}$ lokales Maximum von A

Da $u_1 = 0$ und $u_2 = 3$ auch Randstellen von $\mathbb{D}_u$ sind, erübrigt sich eine gesonderte Randstellenbetrachtung.

$\Rightarrow$ bei $\underline{u = \frac{3}{2}}$ absolutes Maximum von $A \Rightarrow \underline{v} = f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{4}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^3 + 4\left(\frac{3}{2}\right)^2 = -\frac{9}{2} + 9 = \underline{\frac{9}{2}}$

2 Differenzialrechnung (4P)

$f(x) = x \cdot e^{1-x}$

$f'(x) = 1 \cdot e^{1-x} + x \cdot e^{1-x} \cdot (-1) = (1-x)\cdot e^{1-x}$

$f''(x) = (-1)\cdot e^{1-x} + (1-x)\cdot e^{1-x}\cdot(-1) = (-1-1+x)\cdot e^{1-x} = (x-2)\cdot e^{1-x}$

$f'''(x) = 1\cdot e^{1-x} + (x-2)\cdot e^{1-x}\cdot(-1) = (1-x+2)\cdot e^{1-x} = (3-x)\cdot e^{1-x}$

(laut Aufgabentext existiert der Wendepunkt; das hinreichende Kriterium ist nicht zwingend zu prüfen)

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

$f'''(2) \neq 0 \Rightarrow \underline{W\left(2|\frac{2}{e}\right)}$

Wendetangente: $f'(2) = -\frac{1}{e}$, Ansatz $y = -\frac{1}{e}\cdot x + q$

$\overset{W}{\Rightarrow} \frac{2}{e} = -\frac{1}{e}\cdot 2 + q \Rightarrow q = \frac{4}{e}$, also $y = -\frac{1}{e}\cdot x + \frac{4}{e}$

Koord. von $P(4|0)$ einsetzen: $0 = -\frac{1}{e}\cdot 4 + \frac{4}{e}$ stimmt; daher liegt P auf der Wendetangente.

3 Differenzial- und Integralrechnung (4P, 2P)

a) $f(x) = \frac{4x-2}{x^2}$, $f'(x) = \frac{4x^2-(4x-2)2x}{x^4} = \frac{-4x^2+4x}{x^4} = \frac{4(1-x)}{x^3}$

$f''(x) = \frac{-4x^3-4(1-x)3x^2}{x^6} = \frac{8x^3-12x^2}{x^6} = \frac{4(2x-3)}{x^4}$

$\mathbb{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$

Asymptoten: bei $x = 0$ Pol $\Rightarrow$ Gerade $x = 0$ vertikale Asymptote

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{4x-2}{x^2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2\left(\frac{4}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}{x^2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\frac{4}{x}-\frac{2}{x^2}\right) = 0$

$\Rightarrow$ Gerade $y = 0$ horizontale Asymptote

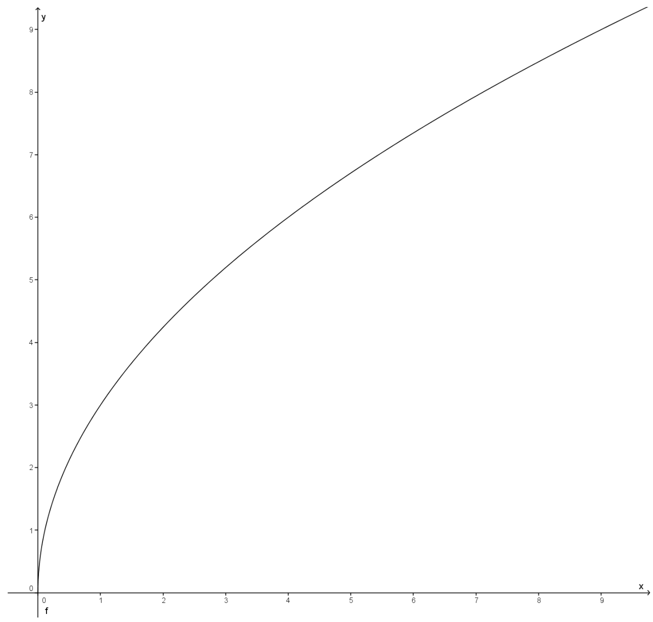
Nullstellen: $f(x) = 0 \Leftrightarrow 4x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

Extrema: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1$, $f''(1) = -4 < 0 \Rightarrow$ bei $x = 1$ lok. Maximum $H(1|2)$

b) $A = \int_1^e f(x)dx = \int_1^e \frac{4x-2}{x^2}dx = \int_1^e \left(\frac{4}{x}-\frac{2}{x^2}\right)dx = \left[4ln|x| + \frac{2}{x}\right]_1^e = 4 + \frac{2}{e} - (0+2) = 2 + \frac{2}{e}$

4 Integralrechnung (1P, 2P)

a) $f(x) = 3\sqrt{x}$



b) $V(b) = \pi\int_0^b f^2(x)dx = \pi\int_0^b 9x\,dx = 9\pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^b = \frac{9\pi b^2}{2}$

$\frac{9\pi b^2}{2} = 9\pi \Leftrightarrow b^2 = 2 \Leftrightarrow |b| = \sqrt{2}$, also $b = \sqrt{2}$, da $b \geq 0$

5 Vektorgeometrie (1P, 1P, 2P, 2P, 3P)

a) Koord. von $B(-3|3|6)$ in Gl. von E einsetzen: $2 \cdot (-3) - 3 + 3 \cdot 6 - 9 = 0$ stimmt, also liegt B in E.

b) $g: \vec{r} = \vec{r}_A + t \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

c) $g: n: \vec{r} = \vec{r}_A + t \cdot \vec{n}_E = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow^{E:}\ 2 \cdot (-4 + 2t) - (-t) + 3 \cdot (1 + 3t) - 9 = 0 \Rightarrow -14 + 14t = 0 \Rightarrow t = 1$

$\Rightarrow^{n:}\ \vec{r}_{A'} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A'(-2|-1|4)$

d) $F_{AA'S} = \frac{1}{2} \cdot \overline{A'A} \cdot \overline{A'B} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4+1+9} \cdot \sqrt{1+16+4} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{14} \cdot \sqrt{21} = \frac{7}{2} \cdot \sqrt{6} \cong 8.57$

e) $Q(x|y|2) \in E \Rightarrow 2x - y + 3 \cdot 2 - 9 = 0 \Rightarrow 2x - y - 3 = 0$ (1)

$\overrightarrow{A'Q} \perp \overrightarrow{A'B} \Leftrightarrow \overrightarrow{A'Q} \cdot \overrightarrow{A'B} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x+2 \\ y+1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = -(x+2) + 4(y+1) - 4 = 0$

$\Rightarrow -x + 4y - 2 = 0$ (2)

$(1) + 2 \cdot (2)$: $7y - 7 = 0 \Rightarrow y = 1 \overset{(1)}{\Rightarrow} x = 4 \cdot 1 - 2 = 2 \Rightarrow Q(2|1|2)$

6 Wahrscheinlichkeitsrechnung ((1P, 2P), 2P, 2P)

$p(\text{"}\mathbf{1}\text{"}) = \frac{36°}{360°} = \frac{1}{10}, p(\text{"}\mathbf{2}\text{"}) = \frac{2}{10}, p(\text{"}\mathbf{3}\text{"}) = \frac{3}{10}, p(\text{"}\mathbf{4}\text{"}) = \frac{4}{10}$

a) X: „Anzahl "**4**" bei 20 Spielen“ ist bin. verteilt mit $p = p(\text{"}\mathbf{4}\text{"}) = 0.4$, $n = 20$

i. $P(X = 2) = \binom{20}{2} \cdot 0.4^2 \cdot 0.6^{18} = \frac{20 \cdot 19}{2 \cdot 1} \cdot 0.4^2 \cdot 0.6^{18} = 190 \cdot 0.4^2 \cdot 0.6^{18} \cong 0.0031$

ii. $P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - P(X = 2) - P(X = 1) - P(X = 0)$

$= 1 - \binom{20}{2} \cdot 0.4^2 \cdot 0.6^{18} - \binom{20}{1} \cdot 0.4 \cdot 0.6^{19} - 0.6^{20} \cong 1 - 0.0031 - 20 \cdot 0.4 \cdot 0.6^{19} - 0.6^{20}$

$\cong 0.9964$

b) Y: „Anzahl „**1**“ bei n Spielen“ ist bin. verteilt mit $p = p(\text{"}\mathbf{1}\text{"}) = 0.1$

$P(Y \geq 1) \geq 0.95 \Leftrightarrow 1 - P(Y = 0) \geq 0.95 \Leftrightarrow 1 - 0.9^n \geq 0.95 \Leftrightarrow 0.9^n \leq 0.05$

$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0.05)}{\ln(0.9)} \cong 28.4$, also mindestens 29 Mal

c) Verteilung der Zufallsgrösse Z: „Auszahlung in Fr. bei diesem Spiel“:

$P(Z = -1) = p(\text{"}\mathbf{1}\text{"}) = \frac{1}{10}, P(Z = 2) = p(\text{"}\mathbf{2}\text{"}) = \frac{2}{10}, P(Z = -3) = p(\text{"}\mathbf{3}\text{"}) = \frac{3}{10}, P(Z = 4) = p(\text{"}\mathbf{4}\text{"}) = \frac{4}{10}$

Erwartungswert: $E(Z) = -1 \cdot \frac{1}{10} + 2 \cdot \frac{2}{10} - 3 \cdot \frac{3}{10} + 4 \cdot \frac{4}{10} = \frac{10}{10} = 1$; wenn der Einsatz x 1 Fr. beträgt ist das Spiel fair

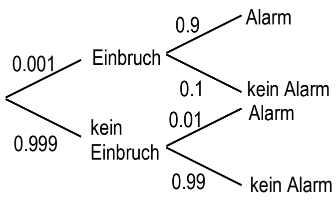
(oder mit G: „Gewinn in Fr. bei diesem Spiel“:

$P(G = -1 - x) = \frac{1}{10}, P(G = 2 - x) = \frac{2}{10}, P(G = -3 - x) = \frac{3}{10}, P(Z = 4 - x) = \frac{4}{10}$

$E(G) = (-1 - x) \cdot \frac{1}{10} + (2 - x) \cdot \frac{2}{10} + (-3 - x) \cdot \frac{3}{10} + (4 - x) \cdot \frac{4}{10} = \frac{10}{10} - \frac{10}{10}x = 1 - x$

Spiel fair $\Leftrightarrow 1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1$)

7 Wahrscheinlichkeitsrechnung (1P, 2P)



a) $P(\text{"}Einbruch\ mit\ Alarm\text{"}) = 0.001 \cdot 0.9 = \underline{0.0009}$

b) $P(\text{"}Einbruch\text{"} \mid \text{"}Alarm\text{"}) = \frac{P(\text{"}Einbruch\ mit\ Alarm\text{"})}{P(\text{"}Alarm\text{"})}$

$= \frac{0.001 \cdot 0.9}{0.001 \cdot 0.9 + 0.999 \cdot 0.01} = \underline{0.08264}$

8 Folgen und Reihen ((1P, 2P, 1P), 2P)

$a_1 = 5,\ a_2 = \frac{10}{3}$

a) GF: $q = \frac{\frac{10}{3}}{5} = \frac{2}{3}$

i. $s_5 = a_1 \cdot \frac{1-q^5}{1-q} = 5 \cdot \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^5}{1-\frac{2}{3}} = 5 \cdot 3 \cdot \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^5\right) = \frac{1055}{81} \cong \underline{13.02}$

ii. $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} < 0.001 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} < 0.0002 \Leftrightarrow n - 1 > \frac{\ln(0.0002)}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}$

$\Leftrightarrow n > \frac{\ln(0.0002)}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)} + 1 \cong 22.006$; das $\underline{23.}$ Glied ist erstmals kleiner als 0.001.

iii. $|q| = \frac{2}{3} < 1 \Rightarrow s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{5}{1-\frac{2}{3}} = \underline{15}$

b) AF: $d = \frac{10}{3} - 5 = -\frac{5}{3}$

$s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n) = \frac{n}{2} \cdot (2a_1 + (n-1) \cdot d) = \frac{n}{2} \cdot \left(10 + (n-1) \cdot \left(-\frac{5}{3}\right)\right) = \frac{n}{2} \cdot \left(\frac{35}{3} - \frac{5}{3}n\right)$

$= -\frac{5}{6}n^2 + \frac{35}{6}n$

Also $-\frac{5}{6}n^2 + \frac{35}{6}n = -\frac{650}{3} \Leftrightarrow -5n^2 + 35n = -1300 \Leftrightarrow n^2 - 7n - 260 = 0$

$n_{1/2} = \frac{7 \pm \sqrt{49+1040}}{2} = \frac{7 \pm 33}{2} = \begin{cases} 20 \\ -13 \end{cases} \Rightarrow \underline{n = 20}$