

Kantonsschule Reussbühl

Fach	<i>Grundlagenfach Mathematik</i>
Prüfende Lehrpersonen	<i>Nils Andersen        Irina Bayer        Hannes Ernst        Yves Gärtner (<a href="mailto:yves.gaertner@edulu.ch">yves.gaertner@edulu.ch</a>)        Armin Hruby        Felix Huber        Roland Reichmuth</i>
Klassen	<i>6a / 6b / 6c / 6d / 6e / 6f / 6K</i>
Prüfungsdatum	<i>26. Mai 2014</i>
Prüfungsdauer	<i>3 Stunden</i>
Erlaubte Hilfsmittel	<i>Formelsammlung „Formeln, Tabellen, Begriffe“ DMK        Taschenrechner TI 83+ bzw. TI voyage200</i>
Anweisungen zur Lösung der Prüfung	<i>Bei jeder Aufgabe muss ein formaler Lösungsweg angegeben werden.</i>
Anzahl erreichbarer Punkte	<i>Aufgabe 1: 8        Aufgabe 2: 13        Aufgabe 3: 6        Aufgabe 4: 4        Aufgabe 5: 12        Aufgabe 6: 4        Aufgabe 7: 3</i> <hr style="width: 20%; margin-left: 0;"/> <i>Total: 50</i>  <i>Notenmassstab: 45 Punkte = Note 6</i>
Anzahl Seiten (inkl. Titelblatt)	<i>3</i>

**1 Extremwertaufgabe, Integral (2 P, 2 P, 4 P)**

Gegeben ist die ganzrationale Funktion 3. Grades  $f: x \mapsto x^3 - 4x^2 + 4x$ .

- Berechnen Sie die Nullstellen von  $f$  und erstellen Sie eine Skizze des Graphen.
- Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die vom Graphen von  $f$  und der  $x$ -Achse eingeschlossen ist.
- Der Punkt  $P(u|v)$ , wobei  $0 < u < 2$  gilt, liegt auf dem Graphen von  $f$ .  $P$  bildet zusammen mit dem Ursprung  $O$  und dem Punkt  $Q(u|0)$  ein Dreieck. Berechnen Sie  $u$  so, dass der Flächeninhalt des Dreieckes  $OPQ$  maximal wird.

**2 Differenzial-, Integralrechnung (2 P, 4 P, 1 P, 3 P, 3 P)**

Gegeben ist die Funktion  $f: x \mapsto (2 - x) \cdot e^x$  ( $e$  ist die Eulersche Zahl).

- Weisen Sie nach, dass  $f'(x) = (1 - x) \cdot e^x$  und  $f''(x) = -x \cdot e^x$  gilt.
- Untersuchen Sie den Graphen von  $f$  auf Nullstellen, Extrempunkte, Wendepunkte und Asymptoten.
- Zeichnen Sie den Graphen von  $f$  für  $-5 \leq x \leq 3$ .
- Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die im 1. Quadranten liegt und vom Graphen von  $f$  und den Koordinatenachsen eingeschlossen wird.
- Bestimmen Sie den Funktionsterm  $g(x) = a \cdot e^{bx}$  derjenigen Exponentialfunktion, deren Graph durch den Punkt  $(0|2)$  geht und dort den Graphen von  $f$  senkrecht schneidet.

**3 Wahrscheinlichkeit (1 P, 1 P, 3 P, 1 P)**

Ein Glücksrad an einem Jahrmarktstand ist in 12 gleich grosse Sektoren eingeteilt. 9 Sektoren sind rot und 3 Sektoren sind grün. Dieses Glücksrad wird fünfmal gedreht.

- Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit für einen "Slalom", bei dem <rot-grün-rot-grün-rot> in dieser Reihenfolge vorkommen muss?
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt genau dreimal grün in irgend einer Reihenfolge vor?

Der Standbetreiber bietet folgendes Spiel an: Gegen einen Einsatz von 2 Franken wird das Glücksrad fünfmal gedreht. Die nachstehende Tabelle zeigt, bei welchem Ereignis welche Auszahlung erfolgt.

Ereignis	genau 3-mal grün	Slalom	genau 4-mal grün	5-mal grün	sonst
Auszahlung	5 Fr.	15 Fr.	30 Fr.	100 Fr.	0 Fr.

- A sei eine Zufallsvariable für die Auszahlung. A kann also die Werte 0, 5, 15, 30 und 100 annehmen. Stellen Sie für A die Wahrscheinlichkeitsverteilung auf (Tabelle).
- Welchen durchschnittlichen Erlös (Einsatz minus Auszahlung) kann der Standbetreiber pro Spiel erwarten?

**4 Wahrscheinlichkeit (1 P, 1 P, 2 P)**

Die Urne U enthält 11 weisse und 5 blaue Kugeln.

Die Urne V enthält 9 schwarze und 7 blaue Kugeln.

Es werden immer zufällig und gleichzeitig zwei Kugeln aus einer Urne gezogen.

- Aus der Urne V werden zwei Kugeln gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind beide Kugeln blau?
- Aus der Urne U werden zwei Kugeln gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind beide Kugeln gleichfarbig?
- Jemand wählt zufällig mit der Wahrscheinlichkeit 0.5 eine Urne aus und zieht daraus gleichzeitig zwei Kugeln. Beide Kugeln sind blau. Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammen sie aus der Urne U?

**5 Vektorgeometrie (2 P, 1 P, 2 P, 3 P, 4 P)**

Gegeben sind die Punkte  $C$  und  $D$  sowie die Ebene  $E$ :

$$C(3|1|4), D(1|-2|-2), E: 2x + 3y + z - 6 = 0$$

- Berechnen Sie den Abstand der Punkte  $C$  und  $D$  sowie den Winkel zwischen deren Ortsvektoren.
- Prüfen Sie, ob der Punkt  $D$  in der Ebene  $E$  liegt.
- Bestimmen Sie die Achsenabschnitte der Ebene  $E$  und zeichnen Sie die drei Spurgeraden in einem räumlichen Koordinatensystem ein.
- Der Punkt  $C$  wird an der Ebene  $E$  gespiegelt. Berechnen Sie die Koordinaten des gespiegelten Punktes  $C'$ .
- Der Punkt  $C$  ist Eckpunkt eines Dreiecks  $ABC$ . Der Punkt  $A$  liegt auf der  $x$ -Achse und der Punkt  $B$  auf der  $y$ -Achse. Berechnen Sie die Koordinaten von  $A$  und von  $B$  derart, dass  $\gamma = \sphericalangle ACB = 90^\circ$  und  $c = \overline{AB} = 10$  beträgt. Geben Sie alle Lösungen an.

**6 Kreis (4 P)**

Der Kreis  $k$  mit Mittelpunkt  $M(6|20)$  berührt die Gerade  $g: y = \frac{2}{3}x + 3$ .

Erstellen Sie eine saubere Zeichnung der Situation (empfohlene Einheiten auf der  $x$ -Achse und der  $y$ -Achse: 2 Häuschen = 4 Einheiten) und berechnen Sie die Koordinatengleichung des Kreises  $k$ .

**7 Folgen und Reihen (3 P)**

Eine Spirale entsteht aus der fortwährenden Zusammenfügung von unendlich vielen Halbkreisen mit immer kleinerem Durchmesser und beginnt im Punkt  $A$  (siehe Skizze).

Der Durchmesser des ersten Halbkreises beträgt  $d_1 = 80$  cm.

Der Durchmesser aller folgenden Halbkreise ist  $\frac{3}{5}$ -mal so gross wie der ihres unmittelbaren Vorgängers.

Bei der Entstehung der Spirale kommen die Endpunkte der Halbkreise im Laufe der Zeit dem sogenannten „Auge“  $E$  (Endpunkt) der Spirale beliebig nahe.

Wie weit ist das Auge  $E$  der Spirale vom Anfangspunkt  $A$  entfernt?

