KANTON LUZERN
Bildungs- und Kulturdepartement

Kantonsschule Reussbühl

Schriftliche Maturitätsprüfung 2015

Fach	*Grundlagenfach Mathematik*
Prüfende Lehrpersonen	*Nils Andersen* *Irina Bayer (irina.bayer@edulu.ch)* *Hannes Ernst* *Jörg Donth* *Yves Gärtner* *Armin Hruby* *Felix Huber*
Klassen	*6a / 6b / 6c / 6e / 6K / 6L*
Prüfungsdatum	*27. Mai 2015*
Prüfungsdauer	*3 Stunden*
Erlaubte Hilfsmittel	*Formelsammlung „Formeln, Tabellen, Begriffe" DMK* *Taschenrechner TI 83+ bzw. TI voyage200*
Anweisungen zur Lösung der Prüfung	*Bei jeder Aufgabe muss ein formaler Lösungsweg angegeben werden.*
Anzahl erreichbarer Punkte	*Aufgabe 1: 4* *Aufgabe 2: 7* *Aufgabe 3: 4* *Aufgabe 4: 4* *Aufgabe 5: 4* *Aufgabe 6: 9* *Aufgabe 7: 4* *Aufgabe 8: 4* *Aufgabe 9: 4* *Total: 44* *Notenmassstab: 40 Punkte = Note 6*
Anzahl Seiten (inkl. Titelblatt)	*3*

1 Differenzialrechnung (4P)

Der Graph einer Funktion mit der Gleichung $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ geht durch den Ursprung des Koordinatensystems, hat in $\mathrm{P}(1|\frac{4}{3})$ eine waagrechte Tangente und besitzt an der Stelle $x = 2$ einen Wendepunkt. Bestimmen Sie die Werte der Parameter a, b, c und d und geben Sie die Funktionsgleichung an.

2 Differenzial- und Integralrechnung (2P, 2P, 1P, 2P)

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = \frac{-x^3+2x^2-4}{x^2}$.

a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich von f und die Gleichungen sämtlicher Asymptoten des Graphen von f.
b) Berechnen Sie die Koordinaten des Hochpunkts des Graphen von f.
c) Zeichnen Sie die Asymptoten und den Hochpunkt in einem Koordinatensystem ein und skizzieren Sie dann den Graphen von f für $-5 \leq x \leq 5$.
d) Betrachten Sie die ins Unendliche reichende Fläche zwischen dem Graphen von f und der Geraden g mit der Gleichung $y = -x + 2$ über dem Intervall $[2; \infty[$. Untersuchen Sie, ob diese Fläche einen endlichen Flächeninhalt besitzt und berechnen Sie diesen gegebenenfalls.

3 Extremwertaufgabe (4P)

Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto y = e^{-x^2}$.

Ein Rechteck hat zwei Eckpunkte auf der x-Achse und zwei auf dem Graphen von f. Veranschaulichen Sie die Situation in einer Skizze. Berechnen Sie die Koordinaten der beiden Punkten auf dem Graphen von f so, dass der Flächeninhalt des Rechtecks maximal wird.

4 Integralrechnung (2P, 2P)

Gegeben sind die Funktionen $f: x \mapsto y = 3\sqrt{x}$ und $g: x \mapsto y = \sqrt{36 - 3x}$.

a) Zeichnen Sie die Graphen von f und g und berechnen Sie die Koordinaten ihres Schnittpunktes.
b) Die beiden Graphen begrenzen zusammen mit der x-Achse ein Flächenstück. Wie gross ist das Volumen des Rotationskörpers, der durch Rotation dieses Flächenstücks um die x-Achse entsteht?

5 Folgen und Reihen (2P, 2P)

Jemand lässt aus 7.50 Meter Höhe einen *Supergummiball* auf den Boden fallen, von wo der Ball wiederholt in die Höhe springt und zum gleichen Aufprallpunkt am Boden zurück fällt. Die ersten drei Fallhöhen sind 7.50 m, 6.00 m und 4.80 m.

a) Zeigen Sie, dass durch diese Fallhöhen eine geometrische Folge bestimmt ist. Wie gross ist dann die zehnte Fallhöhe?
b) Der Ball legt theoretisch unendlich viele Fall- und Steigstrecken zurück. Welche Gesamtstrecke s legt der Ball dabei zurück?

6 Vektorgeometrie (1P, 1P, 1P, 2P, 2P, 2P)

In einem Ausstellungsraum steht als Kunstobjekt eine Pyramide mit der quadratischen Grundfläche ABCD und der Spitze S. Wenn man in diesem Raum zwei Boden- und eine Wandkante als Koordinatenachsen sowie als Einheit einen Dezimeter wählt, haben die Pyramideneckpunkte A, B, C und S folgende Koordinaten:

A(8|16|0), B(10|6|0), C(20|8|0), S(14|12|12).

a) Berechnen Sie die Koordinaten des vierten Eckpunktes D der Grundfläche.
b) M ist Schnittpunkt der Diagonalen der Grundfläche. Zeigen Sie, dass die Spitze S bezüglich der Grundfläche senkrecht über M liegt.
c) Berechnen Sie das Volumen der Pyramide.
d) Berechnen Sie den Winkel zwischen den Seitenkanten SA und SB.
e) Erstellen Sie die Koordinatengleichung der Ebene, die durch die drei Punkte B, C und S definiert ist.
f) An der Wandkante ist im Punkte L(0|0|36) eine starke Lampe montiert. Die Lampe wirft einen Schatten der Pyramide auf den Boden des Raumes, d.h. auf die xy-Ebene. Welche Koordinaten hat der Schattenpunkt T der Spitze S?

7 Wahrscheinlichkeitsrechnung (2P, 2P)

Eine Urne enthält insgesamt fünf Kugeln mit den Nummern 1, 2, 3, 4 und 5. Bei einem Spiel „Summe von 2“ werden daraus mit einem Griff zufällig zwei Kugeln gezogen.

a) Die Zufallsgrösse S ist die Summe dieser beiden Kugelnummern. Stellen Sie in einer Tabelle die Wahrscheinlichkeitsverteilung von S auf.
b) Xaver und Yvonne spielen „Summe von 2“ gegeneinander. Dabei leistet Xaver einen Einsatz von 8 Franken und Yvonne setzt 10 Franken ein. Ist die Summe der beiden Kugelnummern gleich 3, so erhält Xaver den gesamten Einsatz von 18 Franken ausbezahlt. Bei der Summe 6 erhält Yvonne die 18 Franken ausbezahlt. Bei allen andern Summen erhalten Xaver und Yvonne je den halben Gesamteinsatz zurück, also je 9 Franken.
Die Zufallsgrösse X beschreibt den Gewinn (Auszahlung minus Einsatz) für Xaver. Berechnen Sie den Erwartungswert E(X).

8 Wahrscheinlichkeitsrechnung (1P, 1P, 2P)

Ein idealer Würfel wird mehrmals geworfen.

a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Augenzahl 6 beim 5. Versuch zum ersten Mal erscheint?
b) Der Würfel wird 10-mal geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erscheint die Augenzahl 6 genau dreimal?
c) Wie oft muss der Würfel geworfen werden, damit die Wahrscheinlichkeit, dass die Augenzahl 6 mindestens einmal erscheint, mindestens 95% beträgt?

9 Kreis (1P, 3P)

Gegeben ist die Gleichung des Kreises $k: x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0$.

a) Bestimmen Sie die Koordinaten des Mittelpunktes $M(x_M|y_M)$ und den Radius r von k.
b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Berührpunktes $B(x_B|y_B)$ mit $x_B > 0$ derjenigen Tangente t an k mit der Steigung $m_t = \frac{3}{4}$.