

Kantonsschule Reussbühl

Fach	<i>Grundlagenfach Mathematik</i>
Prüfende Lehrpersonen	<i>Nils Andersen Irina Bayer (<a href="mailto:irina.bayer@edulu.ch">irina.bayer@edulu.ch</a>) Jörg Donth Yves Gärtner Felix Huber Roland Reichmuth</i>
Klassen	<i>6a / 6b / 6c / 6d / 6e / 6K</i>
Prüfungsdatum	<i>24. Mai 2016</i>
Prüfungsdauer	<i>3 Stunden</i>
Erlaubte Hilfsmittel	<i>Formelsammlung Mathematik von Adrian Wetzen bzw. „Formeln, Tabellen, Begriffe“ DMK Taschenrechner TI 83+ bzw. TI voyage200</i>
Anweisungen zur Lösung der Prüfung	<i>Bei jeder Aufgabe muss ein formaler Lösungsweg angegeben werden.</i>
Anzahl erreichbarer Punkte	<i>Aufgabe 1: 8 Aufgabe 2: 7 Aufgabe 3: 6 Aufgabe 4: 4 Aufgabe 5: 9 Aufgabe 6: 10  Total: 44  Notenmassstab: 40 Punkte = Note 6</i>
Anzahl Seiten (inkl. Titelblatt)	<i>3</i>

**1 Differenzialrechnung (3P, 2P, 3P)**

Gegeben ist die Funktionenschar  $f_a$  mit Scharparameter  $a \in \mathbb{R}$  und  $a \neq 0$  durch die Gleichung  $f_a(x) = ax^3 + 9x^2 + 9x$ .

- Für diese Teilaufgabe gilt  $a = 3$ . Bestimmen Sie die Nullstellen und die Extremal- und Wendepunkte des Graphen der Funktion  $f_3$ .
- Für welche Werte des Parameters  $a$  hat die Funktion  $f_a$  zwei Extremalstellen?
- Bestimmen Sie den Wert des Parameters  $a$  so, dass die Steigung der Wendetangente  $-4,5$  beträgt. Geben Sie die Gleichung dieser Wendetangente an.

**2 Differenzialrechnung (1P, 3P, 3P)**

Gegeben ist die Funktion  $f$  mit der Gleichung  $f(x) = \frac{1}{2}e^{-x}$ .

- Zeichnen Sie den Graphen von  $f$  im Bereich  $-2 \leq x \leq 3$ .
- Vom Koordinatenursprung wird eine Tangente  $t$  an den Graphen von  $f$  gelegt. Bestimmen Sie die Koordinaten des Berührungspunktes  $B$ .
- $P(u|v)$  sei ein beliebiger Punkt des Graphen von  $f$  mit  $u > 0$ . Für welchen Wert von  $u$  wird der Flächeninhalt des Dreiecks  $O(0|0), P(u|v), Q(u|0)$  maximal? Berechnen Sie diesen maximalen Inhalt.

**3 Integralrechnung (2P, 2P, 2P)**

Gegeben ist die Funktion  $f: x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ .

- Bestimmen Sie  $a > 1$  so, dass die Fläche zwischen dem Graphen von  $f$ , der  $x$ -Achse und den Grenzen  $x = 1$  und  $x = a$  den Inhalt 4 hat.
- Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche  $F(z)$  zwischen dem Graphen von  $f$ , der  $x$ -Achse und den Grenzen  $x = z$  ( $0 < z < 1$ ) und  $x = 1$  in Abhängigkeit von  $z$ .  
Untersuchen Sie dann, ob ein Grenzwert dieses Flächeninhaltes  $F(z)$  für  $z \rightarrow 0$  existiert und geben Sie ihn gegebenenfalls an.
- Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers, der entsteht, wenn man den Graphen von  $f$  zwischen  $x = 1$  und  $x = 9$  um die  $x$ -Achse dreht.

**4 Folgen und Reihen (2P, 2P)**

Eine geometrische Zahlenfolge ist gegeben durch die beiden Glieder

$$a_1 = \frac{25x^2}{4(x^2+1)} \text{ und } a_4 = \frac{2(x^2+1)^2}{5x} \text{ mit } x > 0.$$

- Bestimmen Sie den Quotienten  $q$  der Folge in Abhängigkeit des Parametes  $x$ .
- Zeigen Sie, dass die dazugehörige unendliche geometrische Reihe für  $x = 1$  konvergiert und bestimmen Sie diesen Grenzwert.

**5 Vektorgeometrie (1P, 2P, 3P, 1P, 2P)**

Gegeben ist die Gerade  $g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ -8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot t$ , die Ebene  $E: -2x + 2y + z + d = 0$  und der Punkt  $Q(3|2|1)$  mit  $Q \in E$ .

- Bestimmen Sie den Wert von  $d$  und damit die Gleichung von  $E$ .
- Die Gerade  $g$  durchstösst die  $xy$ -Ebene. Berechnen Sie die Koordinaten des Durchstosspunktes und den Winkel zwischen  $g$  und der  $xy$ -Ebene.
- Der Punkt  $P(3|-7|-8)$  wird an der Ebene  $E$  gespiegelt. Bestimmen Sie die Koordinaten des Spiegelpunktes  $P'$ .

Falls Sie c) nicht lösen konnten, rechnen Sie bei den folgenden Aufgaben mit  $P'(-9|5|-2)$  weiter.

- Zeigen Sie, dass das gleichschenklige Dreieck  $PQP'$  rechtwinklig ist.
- Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes  $R$  so, dass das Viereck  $PQP'R$  ein Quadrat ist.

**6 Wahrscheinlichkeitsrechnung (2P, 2P, 1P, 2P, 3P)**

In einer Urne befinden sich die folgenden zehn beschrifteten Zettel.



- Man zieht nacheinander zwei Zettel ohne Zurücklegen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die beiden Zettel den gleichen Buchstaben tragen.
- Man zieht wiederum nacheinander zwei Zettel ohne Zurücklegen und erhält von einem Beobachter die Information, dass die beiden Zettel den gleichen Buchstaben tragen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass es sich um zwei G's handelt?
- Man zieht einen Zettel, notiert sich den Buchstaben und legt ihn dann zurück in die Urne, bevor man erneut zieht. Auf diese Weise zieht man insgesamt 10 Zettel. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass dabei genau 6-mal der Buchstabe T erscheint?
- Man zieht wiederum mit Zurücklegen. Wie oft muss man einen Zettel ziehen, damit die Wahrscheinlichkeit, dass der Buchstabe G mindestens einmal erscheint, grösser als 95% wird?
- Es wird folgendes Spiel angeboten. Man zahlt einen Einsatz von Fr. 5.- und darf dann nacheinander vier Zettel mit Zurücklegen ziehen. Für jedes O, das erscheint, erhält man Fr. 5.- ausbezahlt. Stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Gewinnes aus Sicht des Spielers in einer Tabelle dar. Wie gross ist der durchschnittlich zu erwartende Gewinn bzw. Verlust aus Sicht eines Spielers bei diesem Spiel?