| | |
|---|---|
| Fach | Grundlagenfach Mathematik |
| Prüfende Lehrpersonen | Nils Andersen<br>Irina Bayer<br>Yves Gärtner<br>Felix Huber (felix.huber@edulu.ch)<br>Roland Reichmuth |
| Klassen | 6a / 6b / 6c / 6d / 6f / 6K |
| Prüfungsdatum | 25. Mai 2021 |
| Prüfungsdauer | 3 Stunden |
| Erlaubte Hilfsmittel | - Taschenrechner TI-30 ECO RS oder<br>TI-30XS Multiview oder<br>TI-30XB Multiview oder<br>TI-30X Plus Multiview<br>- Fundamentum Mathematik und Physik DMK bzw. Formeln, Tabellen, Begriffe DMK |
| Anweisungen zur Lösung der Prüfung | Bei jeder Aufgabe muss ein formaler Lösungsweg angegeben werden. |
| Anzahl erreichbarer Punkte | Aufgabe 1: 8<br>Aufgabe 2: 5<br>Aufgabe 3: 4<br>Aufgabe 4: 5<br>Aufgabe 5: 10<br>Aufgabe 6: 5<br>Aufgabe 7: 5<br>Aufgabe 8: 4<br>Total: 46<br><br>Notenmassstab: 40 Punkte = Note 6.0 |
| Anzahl Seiten (inkl. Titelblatt) | 5 |

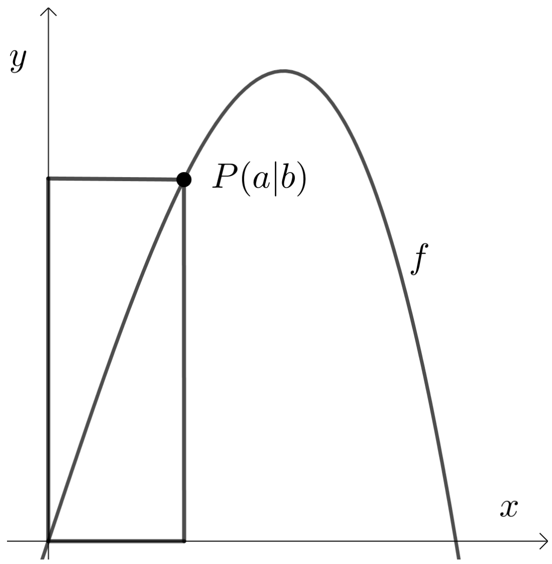
**1 Differenzialrechnung I** (3P, 2P, 3P)

Gegeben ist die Funktion $f$ durch ihre Gleichung $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 3x$.

a) Bestimmen Sie die Extrempunkte von $f$.

b) Für welche Werte von $k \in \mathbb{R}$ berührt die Parabel $p: y = x^2 + k$ den Graphen von $f$?

c) Ein im ersten Quadranten auf dem Graphen von $f$ liegender Punkt $P(a|b)$ spannt mit den Koordinatenachsen ein Rechteck auf. Für welche Koordinaten von $P$ ist der Umfang dieses Rechtecks maximal gross? Wie gross ist dieser maximale Umfang?




**2 Differenzialrechnung II** (1P, 1P, 1P, 2P)

Gegeben ist die Funktion $f$ durch ihre Gleichung $f(x) = \sqrt{x} \cdot e^{-\frac{1}{2}x}$.

a) Geben Sie den Definitionsbereich von $f$ an.

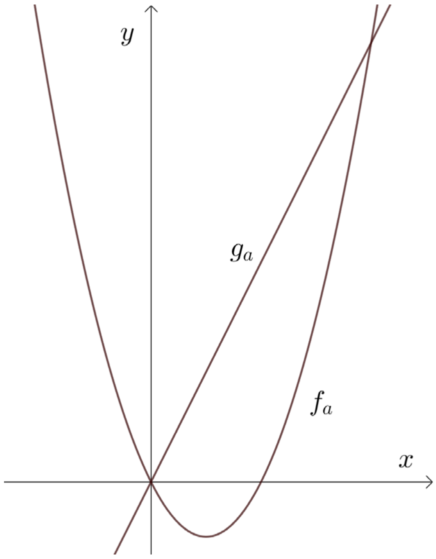
b) Untersuchen Sie das Verhalten von $f(x)$ für $x \to +\infty$.

c) Bestimmen Sie $f'(x)$ und zeigen Sie, dass $f'(4) = -\frac{3}{4e^2}$ ist.

d) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangenten an $f$ an der Stelle $x = 4$.

**3 Integralrechnung I** (4P)

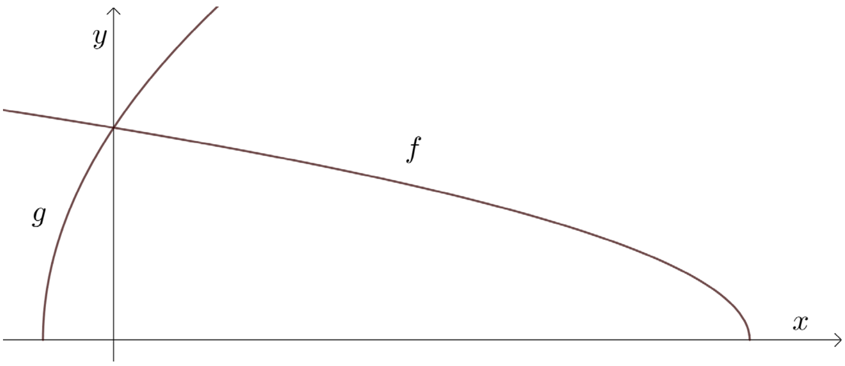
Gegeben sind die Funktionenschar $g_a$ mit der Gleichung $g_a(x) = ax$ und die Funktionenschar $f_a$ mit der Gleichung $f_a(x) = x^2 - ax$ mit gleichem Scharparameter $a > 0$.




Bestimmen Sie den Wert des Parameters $a$ so, dass das Flächenstück, das von den Graphen $g_a$ und $f_a$ vollständig eingeschlossen wird, den Inhalt 36 hat.

**4 Integralrechnung II** (1P, 1P, 3P)

Gegeben sind beiden Funktionen $f(x) = \sqrt{9-x}$ und $g(x) = 3\sqrt{x+1}$ .




a) Bestimmen Sie die Nullstellen von $f$ und $g$.

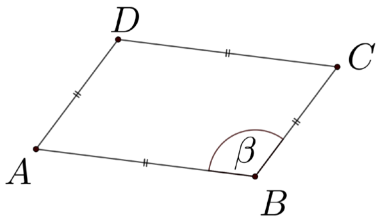
b) Berechnen Sie den Schnittpunkt von $f$ und $g$.

c) Berechnen Sie das Volumen des Körpers, der durch Rotation des von den beiden Graphen und der x-Achse begrenzten Flächenstücks um die $x$-Achse entsteht.

**5 Vektorgeometrie** (2P, 2P, 3P, 3P)

Gegeben sind die drei Punkte $A(7|-7|4)$, $B(-1|3|0)$ und $C(-12|10|1)$
sowie die Ebene $E: 7x - 2y - 3z + 13 = 0$.

a) Bestimmen Sie den Punkt $D$ so, dass das Viereck $ABCD$ ein Parallelogramm ist.




b) Berechnen Sie den Winkel $\beta = \sphericalangle ABC$.

c) Welcher auf der $x$-Achse liegende Punkt $Q$ ist von den Punkten $A$ und $B$ gleich weit entfernt?

d) Der Punkt $P(1.5|-6|1.5)$ wird an der Ebene $E$ gespiegelt. Berechnen Sie die Koordinaten des gespiegelten Punktes $P'$.

**6 Wahrscheinlichkeit I** (1P, 1P, 1P, 2P)

In einer Urne liegen zwei rote und acht blaue Kugeln.

a) Es werden fünf Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, nur blaue Kugeln zu ziehen?

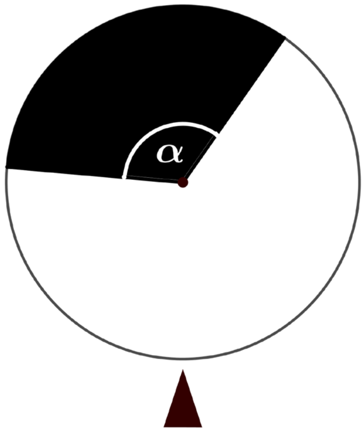
b) Es wurden zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Es ist bekannt, dass die beiden Kugeln gleichfarbig sind. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind sie rot?

c) Es werden fünf Kugeln mit Zurücklegen gezogen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, zwei rote Kugeln zu ziehen?

d) Es wird mit Zurücklegen gezogen. Wie oft muss man mindestens ziehen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 90 % mindestens eine rote Kugel gezogen wird?

**7 Wahrscheinlichkeit II** (3P, 2P)

Bei einem Spiel wird das abgebildete Glücksrad gedreht.




Es gelten die folgenden Spielregeln:

- Falls beim Stillstand des Rades der Pfeil auf den schwarzen Kreissektor mit dem Zentriwinkel $\alpha$ zeigt, ist das ein Treffer.
- Das Rad wird so oft gedreht, bis ein Treffer erzielt wird, höchstens jedoch dreimal. Nach einem Treffer endet das Spiel sofort.
- Wird beim ersten Mal ein Treffer erzielt, gewinnt der Spieler einen Franken.
- Wird beim zweiten Mal ein Treffer erzielt, gewinnt der Spieler zwei Franken.
- Wird beim dritten Mal ein Treffer erzielt, gewinnt der Spieler drei Franken.
- Wird kein Treffer erzielt, verliert der Spieler fünf Franken.

a) Es sei $\alpha = 120\,°$ und $X$ die Zufallsvariable für den Gewinn des Spielers. Stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von $X$ auf und berechnen Sie den Erwartungswert $E(X)$.

b) Berechnen Sie die Trefferwahrscheinlichkeit $p$, damit der Spieler mit einer Wahrscheinlichkeit von $0.24$ zwei Franken gewinnt. Wie gross ist in diesem Fall der Winkel $\alpha$?

**8 Folgen und Reihen** (4P)

Drei Zahlen $x$, $y$ und $z$ bilden eine geometrische Folge mit der Summe 38. Wenn man von der dritten Zahl 2 subtrahiert, erhält man eine arithmetische Folge.

Berechnen Sie die drei Zahlen.