1 Vektorgeometrie

a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 8-2 \\ 7+1 \\ -7-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ -14 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} -1+4 \\ 8-4 \\ -6-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB} = 2 \cdot \overrightarrow{DC} \Rightarrow AB \parallel DC$

b) $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow E(5|3|0)$

c) $\alpha = \arccos\left(\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}|}\right) = \arccos\left(\frac{\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ -14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}}{\sqrt{36+64+196} \cdot \sqrt{36+25+36}}\right) = \arccos\left(\frac{-36+40+84}{\sqrt{296} \cdot \sqrt{97}}\right) \cong 58.7\,°$

d) $g\colon \vec{r} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$, $h\colon \vec{r} = \overrightarrow{OB} + s \cdot \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$g \cap h \Rightarrow \left| \begin{matrix} 2-6t & = & 8-9s \\ -1+5t & = & 7+s \end{matrix} \right| \Rightarrow \left| \begin{matrix} 9s-6t & = & 6 \\ -s+5t & = & 8 \end{matrix} \right| \begin{matrix} \text{I} \\ \text{II} \end{matrix}$

$5 \cdot \text{I} + 6 \cdot \text{II}\colon 39s = 78 \Rightarrow s = 2$, in II: $t = 2$

z-Komponente: $7 + 2 \cdot (-6) = -7 + 2 \cdot 1$ (wahre Aussage)

$\Rightarrow \overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 9 \\ -5 \end{pmatrix} \Rightarrow S(-10|9|-5)$

e) $\vec{n}_F = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow F\colon x + 2y + z + d = 0$

$G \in F \Rightarrow -19 + 20 - 4 + d = 0 \Rightarrow d = 3 \Rightarrow F\colon x + 2y + z + 3 = 0$

f) $g\colon \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$, $F\colon x + 2y + z + d = 0$, $F'\colon 2x + y - z + 3 = 0$

$g \cap F \Rightarrow 2 - 6t + 2(-1+5t) + 7 - 6t + 3 = 0 \Rightarrow t = 5 \Rightarrow Q(-28|24|-23)$

$g \cap F' \Rightarrow 2(2-6t) - 1 + 5t - (7-6t) + 3 = 0 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow Q'(8|-6|13)$

2 Differenzial- und Integralrechnung I

a) $f'(x) = 1 \cdot e^{-x} + x \cdot e^{-x} \cdot (-1) = e^{-x} - x \cdot e^{-x}$

b) $\int \cos(3x)dx = \sin(3x) : 3 + C$, z. B. $F(x) = \frac{1}{3}\sin(3x)$

3 Differenzial- und Integralrechnung II

a) $f(x) = x^3 + 3x^2, f'(x) = 3x^2 + 6x, f''(x) = 6x + 6, f'''(x) = 6 \neq 0$

Nullstellen: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x+3) = 0 \Rightarrow x_1 = -3, x_2 = 0$

Extrempunkte: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow x(x+2) = 0 \Rightarrow x_3 = -2, x_4 = x_2 = 0$

$f''(-2) = -6 < 0, f(-2) = 4 \Rightarrow H(-2|4)$

$f''(0) = 6 > 0, f(0) = 0 \Rightarrow T(0|0)$

Wendepunkt: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x + 6 = 0 \Rightarrow x_5 = -1, f(-1) = 2 \Rightarrow W(-1|2)$

b) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 = 4x \Leftrightarrow x(x+4)(x-1) = 0$

$\Rightarrow x_6 = -4, x_7 = x_4 = x_2 = 0, x_8 = 1$

$$\Rightarrow A = \int_0^1 \big(g(x) - f(x)\big)\,dx = \int_0^1 (4x - x^3 - 3x^2)\,dx = \left[2x^2 - \frac{1}{4}x^4 - x^3\right]_0^1 = \frac{3}{4}$$

4 Differenzial- und Integralrechnung III

a) $D = \mathbb{R}^+$

b) $2 = \frac{a}{\sqrt{9}} \Rightarrow a = 6$

c) $V = \pi \int_1^e \left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right)^2 dx = a^2\pi \int_1^e \frac{1}{x} dx = a^2\pi [\ln(x)]_1^e = a^2\pi = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$

d) $A(u) = \int_u^1 \frac{4}{\sqrt{x}} dx = \int_u^1 4x^{-\frac{1}{2}} dx = \left[8x^{\frac{1}{2}}\right]_u^1 = 8 - 8\sqrt{u}$

$A = \lim\limits_{u \to 0} A(u) = \lim\limits_{u \to 0} 8 - 8\sqrt{u} = 8$

e) $f_4(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{4}{\sqrt{x}} = mx \Leftrightarrow 4x^{-\frac{1}{2}} = mx$ (I)

$f_4'(x) = -\frac{1}{g'(x)} \Leftrightarrow -2x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{m} \Leftrightarrow m = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{2}$ (II)

II in I $\Rightarrow 4x^{-\frac{1}{2}} = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{2} \Leftrightarrow 8 = x^3 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow m = \frac{2^{\frac{3}{2}}}{2} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \Rightarrow g: y = \sqrt{2}x$

5 Wahrscheinlichkeitsrechnung

a) $P = 3! \cdot 0.16 \cdot 0.34 \cdot 0.27 = 8.8\%$

b) $P(\text{Bodenhaltung}|\text{CH}) = \frac{0.27}{0.16+0.34+0.27} = \frac{0.27}{1-0.23} = 35\%$

c) $P(X = 2) = \binom{5}{2} \cdot 0.16^2 \cdot 0.84^3 = 15.2\%$

d) $E = 25 \cdot 0.16 = 4$ Schachteln

e) $P(X \geq 1) \geq 0.95 \Leftrightarrow 1 - P(X = 0) \geq 0.95 \Leftrightarrow 0.05 \geq 0.84^n$

$$\Leftrightarrow \ln(0.05) \geq n \cdot \ln(0.84) \Leftrightarrow \frac{\ln(0.05)}{\ln(0.84)} \leq n \Leftrightarrow 17.1 \ldots \leq n \Rightarrow n = 18$$

f) $E = 0.16 \cdot 4.8 + 0.34 \cdot 3.6 + 0.27 \cdot 2.5 + 0.23 \cdot 1.45 = 3.00$ Franken

g) X: Anzahl Spielrunden

x_i	1	2	3	4	5
p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

6 Beurteilende Statistik

$n = 100$, $p_0 = 0.5$, linksseitiger Hypothesentest

Nullhypothese H_0: $p \geq p_0 = 0.5$ (diese Aussage soll widerlegt werden)

Gegenhypothese H_1: $p < p_0 = 0.5$ (diese Aussage soll gezeigt werden)

Es sei X die Zufallsvariable «Anzahl Treffer in 100 Schüssen» und k der grösste Wert des Verwerfungsbereichs. Das Signifikanzniveau ist 10%.

$P_{0.5}^{100}(X \leq k) \leq 0.1$

Aus Tabelle: $k = 43$

$\Rightarrow$ Annahmebereich: {44, 45, ..., 100}

Falls die Anzahl Treffer in diesem Bereich liegt, wird die Nullhypothese angenommen, d.h. es konnte nicht gezeigt werden, dass die Trefferquote kleiner als 50% ist.

$\Rightarrow$ Verwerfungsbereich: {0, 1, ..., 43}

Falls die Anzahl Treffer in diesem Bereich liegt, wird die Nullhypothese verworfen und also die Gegenhypothese angenommen, die Trefferquote ist kleiner als 50%.

7 Folgen und Reihen

Die Flächeninhalte A_n bilden eine Geometrische Folge mit $A_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 10^2 = 25\sqrt{3}$ und $q = \frac{1}{4}$.

$$\Rightarrow A_n = 25\sqrt{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \Rightarrow A_5 = 25\sqrt{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 \cong 0.169$$

$$\Rightarrow s_n = A_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \Rightarrow s_5 = 25\sqrt{3} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^5}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{8525}{256} \cdot \sqrt{3} \cong 57.68$$