Schwerpunktfach Physik und Anwendungen der Mathematik

Lösungen:

Aufgabe 1: Komplexe Zahlen (5 Punkte)

$z^4 - i\,z^2 + 2 = 0$ $\qquad w = z^2$

$w^2 - iw + 2 = 0$ $\qquad w_{1,2} = \dfrac{i \pm c_1}{2}$, wobei c_1 eine Lösung der Gleichung $c^2 = (-i)^2 - 8 = -9$ ist.

$w_{1,2} = \dfrac{i \pm 3i}{2}$ $\qquad w_1 = 2i = 2 \cdot \text{cis}\,(90°)$ $\qquad w_2 = -i = \text{cis}\,(270°)$

Löse noch (i) $z^2 = 2 \cdot \text{cis}\,(90°) \Rightarrow$ $\qquad z_1 = \sqrt{2} \cdot \text{cis}\,(45°) = i + 1$

$z_2 = \sqrt{2} \cdot \text{cis}\,(225°) = -i - 1$

(ii) $z^2 = \text{cis}\,(270°) \Rightarrow$ $\qquad z_3 = \text{cis}\,(135°) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i)$

$z_4 = \text{cis}\,(315°) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)$

Aufgabe 2: Komplexe Zahlen (1 + 4 = 5 Punkte)

$s_n = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$

a) $s_{n+1} = s_n + (n+1) \cdot (n+1)!$

b) Induktionsverankerung: $s_1 = (1+1)! - 1 = 2 - 1 = 1$ ✓

Induktionsannahme: $s_k = (k+1)! - 1$

Behauptung: $s_{k+1} = (k+2)! - 1$

Beweis: $s_{k+1} = s_k + (k+1) \cdot (k+1)! = (k+1)! - 1 + (k+1) \cdot (k+1)!$

$(k+1)!\,(1 + k + 1) - 1 = (k+1)!\,(k+2) - 1 = (k+2)! - 1$ ✓

Aufgabe 3: Vektorgeometrie (4 + 1 + 3 = 8 Punkte)

a) $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist die Richtung für $\overrightarrow{GH}$ (zur Kontrolle)

Ansatz: $\overrightarrow{GH} = \begin{pmatrix} 4 + 2v \\ -2 - u \\ 5 - u - v \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 4+2v \\ -2-u \\ 5-u-v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 4+2v \\ -2-u \\ 5-u-v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$ liefert das Gleichungssystem

$3 - 2u - v = 0 \quad \wedge \quad 3 + u + 5v = 0$ mit den Lösungen $u = 2$ bzw. $v = -1$

$G(-2 / 5 / 0)$, $H(0 / 1 / 4)$, $\overrightarrow{GH} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$, $|\overrightarrow{GH}| = 6$

b) Die kleinste Kugel hat den Durchmesser d = 6 und den Mittelpunkt $M^*(-1 / 3 / 2)$. $r^* = 3$

c) K: $(x-1)^2 + y^2 + (z-7)^2 = 81$

Schnittpunkte mit g : $(-2-1)^2 + (3+u)^2 + (-2+u-7)^2 = 81$
liefert die Gleichung $u^2 - 6u + 9 = 0$ mit der Doppellösung u = 3. Also ist g eine Tangente an K.

Schnittpunkte mit h : $(2+2v-1)^2 + (1)^2 + (3-v-7)^2 = 81$
liefert die Gleichung $5v^2 + 12v - 63 = 0$, welche keine reelle Lösung hat. Also meidet h die Kugel.

Aufgabe 4: Differenzialgleichung (5 Punkte)

$(1+x^2) \cdot y' + 2xy = 0$

Separation der Variablen: $y' = -\dfrac{2xy}{1+x^2} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{y}\,dy = -\dfrac{2x}{1+x^2}\,dx$

Integration liefert $\ln|y| = -\ln(1+x^2) + C$,

wobei $\displaystyle\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx$ mit Substitution berechnet werden kann.

Also ist die Lösung $y(x) = D \cdot \dfrac{1}{1+x^2}$

Aufgabe 5: Normalverteilung (4 + 2 + 1 = 7 Punkte)

a) Binomialverteilung mit n = 500 und p = 0.05 . X ist die Anzahl unterfüllter Flaschen
$P(X \le 20) = ?$

$\mu = 25$, $\sigma = \sqrt{23.75}$, $z = \dfrac{20 - 25 + 0.5}{\sigma} = -0.92338$

Der Taschenrechner liefert $\Phi(-0.92338) = 0.1779$; Dieser Wert kann auch aus der Tabelle herausgelesen werden. Die Wahrscheinlichkeit beträgt also 0.178

b) $z = \frac{1000-1005}{3} = -1.6667$

Aus der Tabelle für Φ(z) liest man P(unterfüllt) = P(X < 1000) = 0.0478

c) $z = \frac{1000-\mu}{1} = -1.6667 \quad \Rightarrow \quad \mu = 1001.67$ ml (eingestellter Mittelwert)

Aufgabe 6: Impuls und Energie (1 + 2 + 2 = 5 Punkte)

$m_1 = 0.25\text{kg}$; $m_2 = 0.35\text{kg}$; $v_1 = 1.8\frac{\text{m}}{\text{s}}$; $v_2 = -1.8\frac{\text{m}}{\text{s}}$

a) Gesamtimpuls in Richtung der ersten Kugel:
$p = m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = -0.18\text{Ns}$

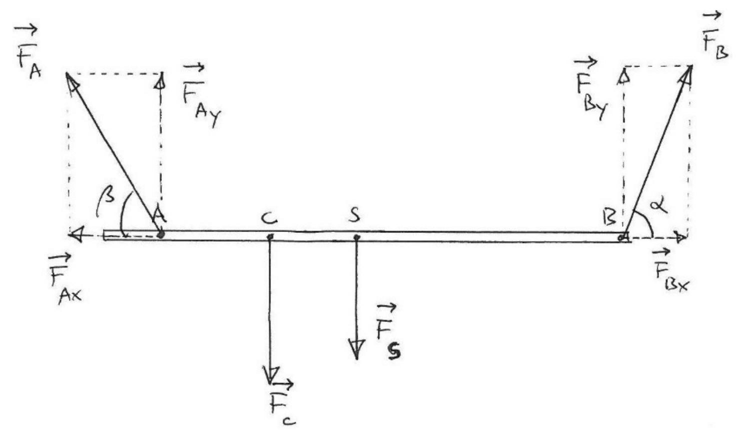
b)
$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot u_1 + m_2 \cdot u_2 \qquad \text{(p)}$
$m_1 \cdot {v_1}^2 + m_2 \cdot {v_2}^2 = m_1 \cdot {u_1}^2 + m_2 \cdot {u_2}^2 \qquad \text{(2E)}$
Lösung (V-200): $u_1 = -2.4\frac{\text{m}}{\text{s}}$; $u_2 = 1.2\frac{\text{m}}{\text{s}}$

c) Gleichung (2E) ersetzen durch:
$0.85 \cdot (m_1 \cdot {v_1}^2 + m_2 \cdot {v_2}^2) = m_1 \cdot {u_1}^2 + m_2 \cdot {u_2}^2 \qquad \text{(2E)'}$
Lösung (V-200): $u_1 = -2.23\frac{\text{m}}{\text{s}}$; $u_2 = 1.08\frac{\text{m}}{\text{s}}$
Bemerkung: Die Lösung mit positivem u_1 und negativem u_2 macht physikalisch keinen Sinn (kein Stoss).

Aufgabe 7: Statik (2 + 2 + 3 = 7 Punkte)

m_B = 15kg; m_M = 65kg; α = 65°; g = 10m/s^2
Distanzen bezüglich A: L_C = 0.6m; L_S = 1.0m; L_B = 2.2m

a)



b) Drehmomente bezüglich A: $L_C \cdot m_M \cdot g + L_S \cdot m_B \cdot g = L_B \cdot F_B \cdot \sin\alpha$

$\rightarrow \; F_B = \dfrac{L_C \cdot m_M \cdot g + L_S \cdot m_B \cdot g}{L_B \cdot \sin\alpha} = 266\text{N}$

$F_{Bx} = F_B \cdot \cos\alpha = 112\text{N}$; $F_{By} = F_B \cdot \sin\alpha = 241\text{N}$

c) Kräftegleichgewicht: $F_{Ax} = F_{Bx} = 112\text{N}$; $F_{Ay} = m_M \cdot g + m_B \cdot g - F_{By} = 544\text{N}$

$F_A = \sqrt{F_{Ax}{}^2 + F_{Ay}{}^2} = 555\text{N}$

$\tan\beta = \dfrac{F_{Ay}}{F_{Ax}} \;\rightarrow\; \beta = 78.3°$

Aufgabe 8: Induktion (2 + 2 = 4 Punkte)

B = 0.8T; A = 0.01m^2; f = 50Hz; $\omega = 2\pi \cdot f = 314\text{s}^{-1}$

a) $\phi = B \cdot A \cdot \cos\varphi = B \cdot A \cdot \cos(\omega t)$
$U_{ind} = -n \cdot \dot{\phi} = -n \cdot B \cdot A \cdot \omega \cdot \sin(\omega t)$

b) $\hat{U} = 325\text{V}$

$\hat{U} = n \cdot B \cdot A \cdot \omega \quad \Longrightarrow \quad n = \dfrac{\hat{U}}{B \cdot A \cdot \omega} = 129$

Aufgabe 9: Wechselströme (3 + 4 = 7 Punkte)

$R = 35\Omega$, L = 24mH, C = 4.7μF, f = 550Hz, $\hat{U}$ = 7.5V.

a) Zwischenrechnungen: Standardeinheiten weggelassen.

$Z_C = \dfrac{1}{i \cdot \omega \cdot C} = -61.1 \cdot i$; $Z_L = i \cdot \omega \cdot L = 82.9 \cdot i$

$Z = \left(\dfrac{1}{R + Z_L} + \dfrac{1}{Z_c}\right)^{-1} = 78.9 - 109.7 \cdot i$

$\Rightarrow |Z| = 135\Omega$; $\varphi = \arg(Z) = -0.947 = -54.3°$ (berechnet mit V-200)

b) $\hat{U} = \tilde{U} = 7.5\text{V}$

$\tilde{I} = \dfrac{\tilde{U}}{Z} = 0.0555\text{A} \cdot e^{0.947i}$

$\tilde{I_C} = \dfrac{\tilde{U}}{Z_c} = 0.123\text{A} \cdot e^{1.571i}$; $\tilde{I}_{RL} = \tilde{I} - \tilde{I_C} = 0.0833\text{A} \cdot e^{-1.171i}$

$\tilde{U}_L = 6.91\text{V} \cdot e^{0.399i}$

$\Rightarrow |\tilde{U}_L| = 6.91V$; $\varphi_L = \arg(\tilde{U}_L) = 0.399 = 22.9°$

Aufgabe 10: Differenzialgleichungen (5 + 2 = 7 Punkte)

m = 0.3kg; v_0 = 10m/s; k = 0.3Ns/m; $g \approx 10\text{m/s}^2$

a) Differenzialgleichung:

$$m \cdot \ddot{s} = F = -m \cdot g - k \cdot \dot{s} \quad \Rightarrow m \cdot \dot{v} = -m \cdot g - k \cdot v$$

$$\dot{v} = -g - \frac{k}{m} v$$

Mit Zahlenwerten, Standardeinheiten in Zwischenrechnungen weggelassen:

$$\dot{v} = -10 - v$$

Allgemeine Lösung der homogenen Gleichung mit der Integrationskonst. v^*:

$$v_H(t) = v^* \cdot e^{-t}$$

Partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung, Ansatz $v = \text{konst.}$ bzw. $\dot{v} = 0$:

$$0 = -10 - v_I \quad \Rightarrow \; v_I = -10$$

Allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung:

$$v(t) = v^* \cdot e^{-t} - 10$$

Integrationskonstante aus der Anfangsbedingung:

$$v(0) = 10 = v^* - 10 \quad \Rightarrow \quad v^* = 20$$

Lösungsfunktion:

$$v(t) = 20 \cdot e^{-t} - 10$$

Ort s:

$$s(t = 1.0\text{s}) = \int_0^1 (20 \cdot e^{-t} - 10)\, dt = (-20 \cdot e^{-t} - 10 \cdot t)|_0^1 = 2.64\text{m}$$

b) Steigzeit wird erreicht bei $v(t_s) = 0$:

$$0 = 20 \cdot e^{-t_s} - 10 \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot e^{-t_s} = 1 \quad \Rightarrow \quad 2 = e^{t_s}$$

$$\Rightarrow \quad t_s = \ln(2) = 0.693\text{s}$$