KANTON LUZERN
Bildungs- und Kulturdepartement

Schriftliche Maturitätsprüfung 2014

Kantonsschule Reussbühl Luzern

Schwerpunktfach Physik und Anwendungen der Mathematik

Prüfende Lehrpersonen	*Hannes Ernst (hannes.ernst@edulu.ch)* *Luigi Brovelli (luigi.brovelli@edulu.ch)*
Klasse	*6c*
Prüfungsdatum	*27. Mai 2014*
Prüfungsdauer	*3 Stunden*
Erlaubte Hilfsmittel	*Taschenrechner "TI Voyage 200" oder "TI-30"* *Formelsammlung "Formeln, Tabellen, Begriffe" mit Beiblättern*
Anweisungen zur Lösung der Prüfung	• *Verwenden Sie für jede Aufgabe einen neuen Bogen.* • *Der Lösungsweg muss in jeder Aufgabe gut dokumentiert sein.* • *Wenn der Taschenrechner für algebraische Umformungen oder mit speziellen Funktionen benutzt wird, soll dies deklariert werden. Beachten Sie bei den einzelnen Aufgaben jeweils die besonderen Hinweise zur Benutzung des Taschenrechners.* • *Alle verwendeten Symbole sind zu definieren (sofern nicht im Aufgabentext definiert).* • *Physikalische Formeln, welche nicht der Formelsammlung entnommen werden, sind zu beweisen oder zu begründen.*
Anzahl erreichbarer Punkte	*Aufgabe 1: 5* *Aufgabe 2: 5* *Aufgabe 3: 8* *Aufgabe 4: 5* *Aufgabe 5: 7* *Aufgabe 6: 5* *Aufgabe 7: 7* *Aufgabe 8: 4* *Aufgabe 9: 7* *Aufgabe 10: 7* *Total: 60* *Notenmassstab: 48 Punkte = Note 6*
Anzahl Seiten (inkl. Titelblatt)	*5*

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Aufgabe 1: Komplexe Zahlen (5 Punkte)

Lösen Sie die Gleichung $z^4 - i z^2 + 2 = 0$ in der Grundmenge $\mathbb{C}$.
Stellen Sie die Lösungen in der Normalform dar.

Hinweis:
v200-Funktionen zum Lösen von Gleichungen dürfen nicht benutzt werden.

Aufgabe 2: Vollständige Induktion (5 Punkte)

Untersuchen Sie die Formel $s_n = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$, $n \in \mathbb{N}$

a) Geben Sie den rekursiven Zusammenhang an: $s_{n+1} = s_n + ??$

b) Beweisen Sie die obige, explizite Formel mit dem Beweisverfahren der vollständigen Induktion.

Hinweis:
Hier darf der v200 für Termumformungen nicht verwendet werden.

Aufgabe 3: Vektorgeometrie (8 Punkte)

Gegeben sind die beiden Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

a) Berechnen Sie den Abstand der beiden Geraden sowie die beiden Lotfusspunkte G und H.

b) Geben Sie den Mittelpunkt und den Radius der kleinsten Kugel an, für welche g und h Tangenten sind.

c) Eine andere Kugel hat den Mittelpunkt M(–1/5/4) und den Radius r = 3.
Zeigen Sie, dass g diese zweite Kugel ebenfalls berührt, dass aber h diese Kugel meidet.

Aufgabe 4: Differenzialgleichung (5 Punkte)

Lösen Sie die Differenzialgleichung $(1 + x^2) \cdot y' + 2xy = 0$

Hinweis:
Desolve darf nicht benutzt werden. Stammfunktionen müssen ohne TR-Hilfe bestimmt werden.

Aufgabe 5: Normalverteilung (7 Punkte)

a) Eine Maschine füllt Apfelsaft in Liter-Flaschen ab. Man rechnet, dass aus technischen Gründen 5% der abgefüllten Flaschen unterfüllt sind, das heisst etwas weniger als 1l Apfelsaft enthalten. Mit welcher Wahrscheinlichkeit befinden sich in einer Stichprobe von 500 Flaschen höchstens 20, die unterfüllt sind?
Zeigen Sie, dass die Laplace-Bedingung erfüllt ist und approximieren Sie die Binomialverteilung durch die Normalverteilung.

b) Ein zweiter Maschinentyp füllt ebenfalls Liter-Flaschen ab. Die tatsächliche Abfüllmenge sei normalverteilt. Ein Abfüllbetrieb hat seine Maschinen auf den Mittelwert $\mu = 1005$ ml eingestellt. Die Streuung beträgt $\sigma = 3$ ml. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine Flasche unterfüllt, enthält also weniger als 1000 ml?

c) Ein dritter Maschinentyp hat eine Streuung von nur noch $\sigma = 1$ ml. Wie muss der Mittelwert eingestellt werden, wenn die Wahrscheinlichkeit für eine Unterfüllung gleich wie beim zweiten Typ sein soll?

Aufgabe 6: Impuls und Energie (5 Punkte)

Zwei gleich grosse Holzkugeln der Massen 250g (Kugel 1) und 350g (Kugel 2) rollen (ohne Rollreibung) auf einem Tisch geradlinig mit einer Geschwindigkeit von jeweils 1.8m/s aufeinander zu. Der Stoss erfolgt zentral.

a) Wie gross ist der Gesamtimpuls des Systems?

Berechnen Sie nun die Geschwindigkeiten beider Kugeln nach dem Stoss für die folgenden zwei Fälle (b, c). Schreiben Sie für jeden Fall die Gleichungen auf, die Sie lösen müssen. Die Lösungen können mit dem V-200 berechnet werden.

b) Der Stoss verläuft zentral und vollkommen elastisch.

c) Der Stoss verläuft zentral. Es werden 15% der gesamten kinetischen Energie in innere Energie umgewandelt.

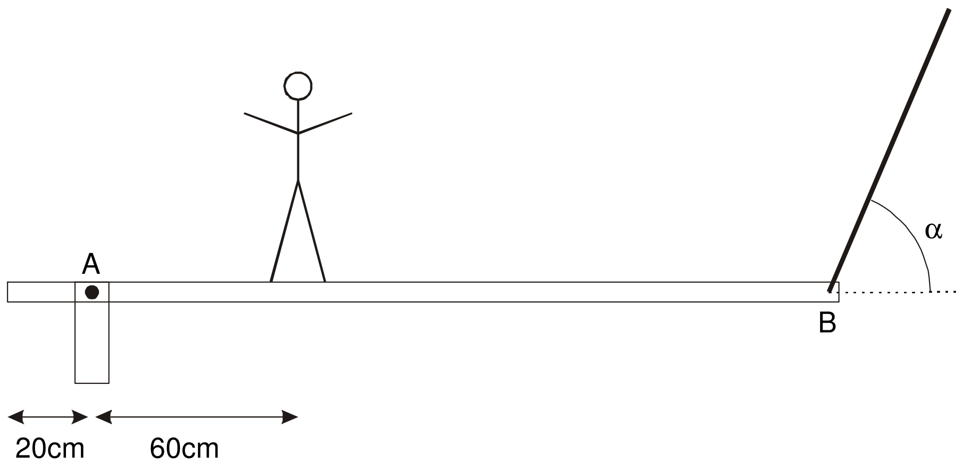
Aufgabe 7: Statik (7 Punkte)

Ein 2.4m langes Brett (mit Schwerpunkt in der Mitte) der Masse 15kg ist im Punkt A drehbar gelagert und im Punkt B an einem Seil aufgehängt, so dass es horizontal liegt. Der Winkel α beträgt 65°. An der gezeichneten Stelle steht ein Mensch der Masse 65kg.

a) Skizzieren Sie qualitativ sämtliche Kräfte, welche auf das Brett wirken.

b) Berechnen Sie den Betrag der Kraft, welche das Seil in Punkt B auf das Brett ausüben muss.

c) Berechnen Sie den Betrag der Kraft, welche im Punkt A auf das Brett wirkt, sowie den Winkel ihrer Richtung zur Horizontalen.

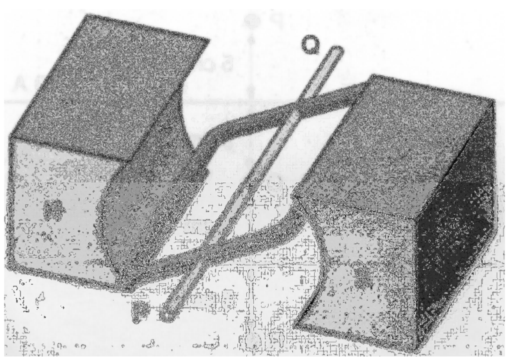


Aufgabe 8: Induktion (4 Punkte)

Eine flache, quadratische Spule (Abmessungen: 10cm x 10cm) dreht sich in einem homogenen Magnetfeld (Flussdichte: B = 0.8T) 50mal in einer Sekunde um die Achse PQ (siehe Abbildung).

a) Zeigen Sie, dass zwischen den Anschlüssen der Spule eine „sinusförmige" Wechselspannung entsteht.

b) Wie viele Windungen muss die Spule haben, damit eine maximale Spannung von 325V (Spitzenwert bzw. Scheitelwert) erzeugt werden kann?

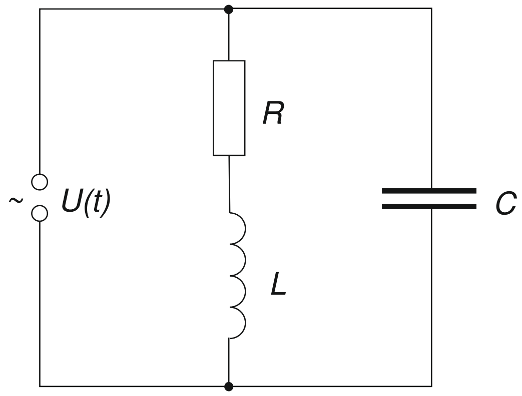


Aufgabe 9: Wechselströme (7 Punkte)

Die Skizze zeigt eine Schaltung mit einem ohmschen Widerstand (R = 35Ω), einer idealen Spule (L = 24mH) und einem Kondensatoren (C = 4.7μF). Die Spannungsquelle liefert eine Wechselspannung der Frequenz f = 550Hz mit Scheitelwert $\hat{U}$ = 7.5V.

a) Berechnen Sie Betrag und Phase der Impedanz der ganzen Schaltung.

b) Berechnen Sie Scheitelwert und Phase (bezogen auf die Spannungsquelle) der Spannung über der Spule.



Aufgabe 10: Differenzialgleichungen (7 Punkte)

Für die volle Punktezahl ist in dieser Aufgabe eine detaillierte Darstellung des Lösungsweges erforderlich! Sie dürfen für die Fallbeschleunigung die Näherung $g \approx 10\mathrm{m/s^2}$ verwenden.

Ein Ball der Masse 300g wird mit einer Anfangsgeschwindigkeit v_0 = $10\mathrm{m/s}$ senkrecht nach oben abgeschossen. Es wirkt eine zur Geschwindigkeit proportionale Reibung: $\vec{F}_R = -k \cdot \vec{v}$ mit $k = 0.3\mathrm{Ns/m}$.

a) Berechnen Sie die Position s des Balles (in Bezug auf den Startort s = 0m) zum Zeitpunkt t = 1.0s nach dem Start.

b) Nach welcher Zeit nach dem Start erreicht der Ball den höchsten Punkt seiner Flugbahn?