KANTON
LUZERN
Bildungs- und Kulturdepartement

Schriftliche Maturitätsprüfung 2018

Kantonsschule Reussbühl Luzern

Schwerpunktfach Physik und Anwendungen der Mathematik

Prüfende Lehrpersonen	*Yves Gärtner (yves.gaertner@edulu.ch)* *Dr. Luigi Brovelli (luigi.brovelli@edulu.ch)*
Klasse	*6abK*
Prüfungsdatum	*28. Mai 2018*
Prüfungsdauer	*3 Stunden*
Erlaubte Hilfsmittel	• *Taschenrechner „TI voyage 200" („V-200") und „TI-30"* • *Formelsammlung Physik (A. Wetzel)* • *Formelsammlung „Formeln, Tabellen, Begriffe" (DMK)* • *Ergänzungen zur Formelsammlung*
Anweisungen zur Lösung der Prüfung	• *Verwenden Sie für jede Aufgabe einen neuen Bogen.* • *Der Lösungsweg muss in jeder Aufgabe gut dokumentiert sein.* • *Alle algebraischen Umformungen sind manuell auszuführen. Der V-200 darf nur für numerische Berechnungen oder zur Kontrolle benützt werden.* • *Alle verwendeten Symbole sind zu definieren (sofern sie nicht im Aufgabentext definiert sind).* • *Physikalische Formeln, welche nicht der Formelsammlung entnommen werden, sind zu beweisen oder zu begründen.* • *Wenn Sie für eine Teilaufgabe ein Resultat einer vorhergehenden Teilaufgabe verwenden müssen, welche Sie nicht gelöst haben, können Sie mit einem selbst gewählten Wert weiter rechnen. Dieser ist dann aber deutlich zu kennzeichnen.*
Anzahl erreichbarer Punkte	*Aufgabe 1: 6* *Aufgabe 2: 6* *Aufgabe 3: 8* *Aufgabe 4: 4* *Aufgabe 5: 6* *Aufgabe 6: 6* *Aufgabe 7: 8* *Aufgabe 8: 9* *Aufgabe 9: 7* ______________ *Total: 60* *Notenmassstab: 48 Punkte = Note 6*
Anzahl Seiten (inkl. Titelblatt)	*4*

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Aufgabe 1 (2 + 1 + 3 = 6 Punkte)

Die Kugel K ist gegeben durch die Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z + k = 0$.
Zusätzlich gilt $R(3|0|0) \in K$.

a) Berechnen Sie den Wert des Parameters k in der Gleichung von K und dann die Koordinaten des Mittelpunktes M von K und ihr Radius r.
(zur Kontrolle: $M(1|-1|2)$, $r = 3$)

b) Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangentialebene T an K im Punkt R.

c) Ein Lichtstrahl $g = (QR)$, der von $Q(5|4|-5)$ ausgeht, wird im Punkt R an der Kugel K reflektiert. Berechnen Sie einen Richtungsvektor des reflektierten Strahls g'.

Aufgabe 2 (2 + 2 + 2 = 6 Punkte)

Gegeben sind die komplexen Funktionen f und g mit den Gleichungen
$f(z) = 1 - \frac{5}{2z+4}$ und $g(z) = z^4 + z + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

a) Berechnen Sie alle Fixpunkte der Funktion f und alle Fixpunkte der Funktion g. Geben Sie die Resultate in Normalform an.

b) Bestimmen sie das Urbild der Geraden $h: w + \overline{w} - 1 = 0$ unter der Funktion f. Was stellt diese Urbildmenge $f^{-1}(h)$ geometrisch dar?

c) Bestimmen Sie das Bild des Kreises $k: |z + 2| = 3$ unter der Funktion f. Was stellt diese Bildmenge $f(k)$ geometrisch dar?

Aufgabe 3 (3 + 3 + 2 = 8 Punkte)

Gegeben ist die DGL 1. Ordnung $y' = -2 \cdot tan(x) \cdot y + \cos^3(x)$.

a) Berechnen Sie die Lösungsmenge y_H der dazugehörigen homogenen DGL mit der Methode der Separation der Variablen.
(Kontrolle: $y_H = C \cdot \cos^2(x), C \in \mathbb{R}$)

b) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung y_p der gegeben, inhomogene DGL mit der Methode der Variation der Konstanten und geben Sie dann die Lösungsmenge der DGL an.

c) Berechnen Sie dann jene spezielle Lösung y_s der DGL, die der Anfangsbedingung $y(0) = 1$ genügt.

Aufgabe 4 (3 + 1 = 4 Punkte)

Gegeben ist die affine Abbildung $\alpha: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2: \vec{x} \mapsto \begin{pmatrix} a & \frac{1}{8} \\ 15 & 2a \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ b \end{pmatrix}$ mit den reellen Parametern a und b.

a) Bestimmen Sie $a > 0$ und b so, dass α eine Fixpunktgerade besitzt.

b) Geben Sie dann die Koordinatengleichung der Fixpunktgeraden von α an.

Aufgabe 5 (3 + 3 = 6 Punkte)

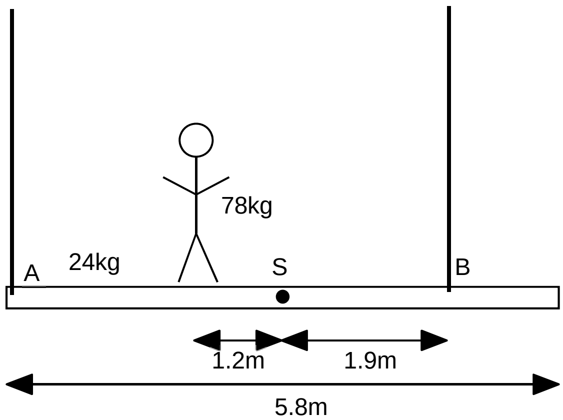
Gegeben ist die Funktion $f:]0; \infty[\longrightarrow \mathbb{R}: x \mapsto x \cdot \ln(x)$.

a) Bestimmen Sie das 6. Taylorpolynom $p_5(x)$ von f bei der Entwicklungsstelle $x_0 = 1$.

b) Berechnen Sie die vollständige Taylor-Reihe $p(x)$ von f bei der Entwicklungsstelle $x_0 = 1$. Bestimmen Sie dann den maximalen <u>offenen</u> Konvergenzbereich $\widetilde{\mathbb{D}}$ von $p(x)$.
Hinweis: Zeigen Sie, dass für die Koeffizienten $a_i = (-1)^i \cdot \frac{1}{(i-1) \cdot i}$, $i \geq 2$ gilt.

Aufgabe 6 (1 + 2 + 3 = 6 Punkte)

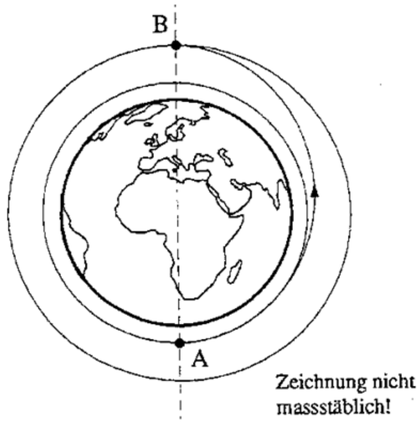
Eine Person der Masse 78kg steht auf einem Brett (Masse: 24kg, Länge: 5.8m, Schwerpunkt in der Mitte), welches in A und B an Seilen aufgehängt ist (Skizze nicht massstäblich).



a) Zeichnen Sie in einer einfachen Skizze alle auf das Brett einwirkenden Kräfte ein.
b) Formulieren Sie explizit die Gleichgewichtsbedingungen für diese Kräfte!
c) Wie gross sind die Kräfte, die in A und in B auf das Brett wirken?

Aufgabe 7 (2 + 1 + 2 + 3 = 8 Punkte)

Eine Raumfähre umkreist die Erde in einer Höhe von 450km über der Erdoberfläche.



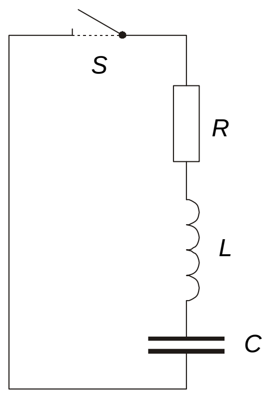
a) Wie gross ist die Geschwindigkeit der Raumfähre auf dieser Kreisbahn? Geben Sie eine kurze Herleitung der Formel, die Sie verwenden.
b) Wie lange dauert eine Erdumrundung auf dieser Kreisbahn?

Die Raumfähre soll nun eine Raumstation anfliegen, die auf 1'250km Höhe die Erde umkreist. Zu diesem Zweck wird im Punkt A durch kurzzeitiges Zünden der Triebwerke die Geschwindigkeit erhöht. Danach fliegt die Raumfähre antriebslos auf einer elliptischen Bahn weiter und trifft die Raumstation im erdfernsten Punkt B der Bahn.

c) Berechnen Sie die Zeit, welche die Raumfähre für den Weg von A nach B benötigt.
d) Berechnen Sie die Geschwindigkeit, auf welche die Raumfähre im Punkt A gebracht werden muss.
Hinweis: Benützen Sie das zweite Keplersche Gesetz und die Energieerhaltung!

Aufgabe 8 (3 + 2 + 4 = 9 Punkte)

In einem Stromkreis befinden sich in Serie ein ohmscher Widerstand $R = 12\Omega$, ein Kondensator mit Kapazität $C = 10\mu\mathrm{F}$ und eine (ideale) Spule mit Induktivität $L = 35\mathrm{mH}$. Zu Beginn sei der Schalter *S* offen und der Kondensator sei auf die Spannung $U_0 = 12\mathrm{V}$ aufgeladen.



a) Zeigen Sie, dass die Spannung über dem Kondensator eine gedämpfte harmonische Schwingung ausführt, wenn der Schalter geschlossen wird und sich der Kondensator über Widerstand und Spule entladen kann. Stellen Sie dazu eine Differenzialgleichung für die Spannung über dem Kondensator auf.
b) Berechnen Sie die Schwingungsdauer dieser Schwingung.
c) Berechnen Sie die Spannung über dem Kondensator zum Zeitpunkt $t = 5.5\mathrm{ms}$ nach dem Schliessen des Schalters.
Hinweis: Beachten Sie die korrekten Startbedingungen!

Aufgabe 9 (1 + 1 + 1 + 2 + 2 = 7 Punkte)

Rechnen Sie in dieser Aufgabe relativistisch!

In einer Elektronenstrahlröhre werden Elektronen mit einer Spannung von 80kV beschleunigt.

Wie gross sind nach der Beschleunigung

a) die kinetische Energie,

b) die Gesamtenergie,

c) die Masse und

d) die Geschwindigkeit der Elektronen?

e) Nach der Beschleunigung durchlaufen die Elektronen im freien Flug eine Strecke von 8.5cm, bevor sie auf einen Leuchtschirm treffen. Wie viel Zeit brauchen die Elektronen (gemessen in ihrem eigenen Bezugssystem) für diese Strecke?