Schwerpunktfach Physik und Anwendungen der Mathematik: Lösungen

Aufgabe 1 (2 + 1 + 3 = 6 Punkte)

a) $K: x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z+k=0 \xRightarrow{R(3|0|0)} 9-6+k=0 \Rightarrow k=-3$
$\Rightarrow K: x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-3=0,\ x^2-2x+y^2+2y+z^2-4z-3=0$
$\Leftrightarrow\ (x-1)^2-1+(y+1)^2-1+(z-2)^2-4-3=0$
$\Leftrightarrow\ (x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=9 \Rightarrow M(1|-1|2), r=\sqrt{9}=3$

b) $\vec{n}_T=\overrightarrow{MR}=\begin{pmatrix}3-1\\0-(-1)\\0-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix} \Rightarrow T: 2x+y-2z+d=0$
$\xRightarrow{R(3|0|0)} 6+0-0+d=0 \Rightarrow d=-6 \Rightarrow T: 2x+y-2z-6=0$

c) Reflexion von g an K = Reflexion von g an Tangentialebene T
Q an T reflektieren $\longrightarrow Q': n: \vec{r}=\overrightarrow{OQ}+t\cdot\vec{n}_T=\begin{pmatrix}5\\4\\-5\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$
$n\cap T \longrightarrow F: 2(5+2t)+4+t-2(-5-2t)-6=0$
$\Rightarrow 10+4t+4+t+10+4t-6=0 \Rightarrow 9t+18=0 \Rightarrow t=-2$
$\Rightarrow \overrightarrow{OF}=\begin{pmatrix}5\\4\\-5\end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} \Rightarrow F(1|2|-1)$
$\overrightarrow{OQ'}=\overrightarrow{OQ}+2\cdot\overrightarrow{QF}=\begin{pmatrix}5\\4\\-5\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}-4\\-2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\0\\3\end{pmatrix} \Rightarrow Q'(-3|0|3)$
Richtungsvektor von g': $\vec{v}=\overrightarrow{Q'R}=\begin{pmatrix}3-(-3)\\0-0\\0-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\0\\-3\end{pmatrix}$

Aufgabe 2 (2 + 2 + 2 = 6 Punkte)

a) Fixpunkte von f: $z=1-\frac{5}{2z+4} \Longrightarrow 2z^2+4z=2z+4-5 \Longrightarrow 2z^2+2z+1=0$
$\Longrightarrow z^2+z+\frac{1}{2}=0, D=1-4\cdot\frac{1}{2}=-1=q^2 \Longrightarrow q_{1,2}=\pm i \Longrightarrow z_{1,2}=\frac{-1\pm i}{2}$
Fixpkte von g:$z=z^4+z+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \Longrightarrow z^4=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, \left|-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|=1, \tan(\varphi)=-\sqrt{3}$
$\Longrightarrow \varphi_1=-60° \Longrightarrow \varphi=-60°+180°=120°$, da $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ im 2. Quadrant,
$\Longrightarrow z^4=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=e^{i\cdot 120°} \Longrightarrow z_k=e^{i\cdot\frac{120°+k\cdot 360°}{4}}=e^{i\cdot(30°+k\cdot 90°)}, k=0,\dots,3$
$z_0=e^{i\cdot 30°}=\cos(30°)+i\cdot\sin(30°)=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i,\ z_1=e^{i\cdot 120°}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$
$z_2=e^{i\cdot 210°}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i,\ z_3=e^{i\cdot 300°}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

b) $f(z)=w=1-\frac{5}{2z+4}$
$\Longrightarrow f^{-1}(h): 1-\frac{5}{2z+4}+1-\frac{5}{2\bar{z}+4}-1=0 \Longrightarrow -\frac{5}{2z+4}-\frac{5}{2\bar{z}+4}+1=0$
$\Longrightarrow -5(2\bar{z}+4)-5(2z+4)+(2z+4)(2\bar{z}+4)=0$
$\Longrightarrow -10\bar{z}-20-10z-20+4z\bar{z}+8z+8\bar{z}+16=0 \Longrightarrow z\bar{z}-\frac{1}{2}z-\frac{1}{2}\bar{z}-6=0$
$\Longrightarrow \left(z-\frac{1}{2}\right)\left(\bar{z}-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}-6=0 \Longrightarrow \left|z-\frac{1}{2}\right|^2=\frac{25}{4} \Longrightarrow \left|z-\frac{1}{2}\right|=\frac{5}{2}$
Kreis mit Mittelpunkt $m=\frac{1}{2}$ und Radius $r=\frac{5}{2}$

c) $f(z)=w=1-\frac{5}{2z+4} \Longrightarrow \frac{5}{2z+4}=1-w \Longrightarrow \frac{5}{1-w}=2z+4 \Longrightarrow z=\frac{5}{2(1-w)}-2=f^{-1}(w)$
$\Longrightarrow f(k): \left|\frac{5}{2(1-w)}-2+2\right|=3 \Longrightarrow \frac{5}{2}\cdot\left|\frac{1}{1-w}\right|=3 \Longrightarrow \frac{1}{|1-w|}=\frac{6}{5} \Longrightarrow \frac{5}{6}=|1-w|,$
$\Longrightarrow |w-1|=\frac{5}{6}$; Kreis mit Mittelpunkt $m=1$ und Radius $r=\frac{5}{6}$

Aufgabe 3 (3 + 3 + 2 = 8 Punkte)

a) hom. DGL: $y' = -2 \cdot tan(x) \cdot y \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -2 \cdot tan(x) \cdot y \Leftrightarrow \int \frac{1}{y} dy = -2 \cdot \int tan(x) dx$
$\Leftrightarrow \ln|y| = -2 \cdot (-\ln(\cos(x))) + \tilde{C}, \tilde{C} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \ln|y| = 2 \cdot \ln|\cos(x)| + \tilde{C}, \tilde{C} \in \mathbb{R}$
$\Leftrightarrow |y| = e^{2 \cdot \ln|\cos(x)|} \cdot e^{\tilde{C}}, \tilde{C} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y = C \cdot e^{2 \cdot \ln|\cos(x)|} = C \cdot \left(e^{|\cos(x)|}\right)^2, C \in \mathbb{R}$ (da auch $y = 0$ die hom. DGL löst) $\Leftrightarrow y = C \cdot \cos^2(x), C \in \mathbb{R}$

b) Ansatz: $y_p = C(x) \cdot \cos^2(x)$, in DGL einsetzen:
$\Rightarrow C'(x) \cdot \cos^2(x) - C(x) \cdot 2 \cdot \cos(x) \cdot \sin(x) = -2tan(x) \cdot C(x) \cdot \cos^2(x) + \cos^3(x)$
$\Rightarrow C'(x) \cdot \cos^2(x) - C(x) \cdot 2 \cdot \cos(x) \cdot \sin(x) = -2 \cdot sin(x) \cdot C(x) \cdot \cos(x) + \cos^3(x)$
$\Rightarrow C'(x) \cdot \cos^2(x) = \cos^3(x) \Rightarrow C'(x) = \cos(x) \Rightarrow C(x) = \sin(x)\ (+D, D \in \mathbb{R})$
$\Rightarrow y_p = \sin(x) \cdot \cos^2(x)$
$\Rightarrow y = y_H + y_p = C \cdot \cos^2(x) + \sin(x) \cdot \cos^2(x) = (C + \sin(x)) \cdot \cos^2(x), C \in \mathbb{R}$

c) $y(0) = 1 \Rightarrow (C + \sin(0)) \cdot \cos^2(0) = 1 \Rightarrow C = 1 \Rightarrow y_s = (1 + \sin(x)) \cdot \cos^2(x)$

Aufgabe 4 (3 + 1 = 4 Punkte)

a) Es muss gelten: $\begin{vmatrix} a-1 & \frac{1}{8} \\ 15 & 2a-1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (a-1)(2a-1) - \frac{15}{8} = 0$
$2a^2 - 3a + 1 - \frac{15}{8} = 0 \Rightarrow 2a^2 - 3a - \frac{7}{8} = 0 \Rightarrow a_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+7}}{4} = \frac{3 \pm 4}{4}$
$\Rightarrow a = \frac{7}{4}$, da $a > 0$ sein soll.
$\Rightarrow$ Fixpunktgleichung: $\begin{pmatrix} \frac{7}{4} - 1 & \frac{1}{8} \\ 15 & 2 \cdot \frac{7}{4} - 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ b \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{8} \\ 15 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ b \end{pmatrix} = \vec{0}$
Für Fixpunktgerade muss gelten: $\frac{b}{\frac{1}{4}} = \frac{15}{\frac{3}{4}} = \frac{60}{3} = 20 \Leftrightarrow b = 5$
$\Rightarrow \alpha(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{7}{4} & \frac{1}{8} \\ 15 & \frac{7}{2} \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 5 \end{pmatrix}$

b) Aus Fixpunktgleichung z.B. $\frac{3}{4} \cdot x + \frac{1}{8} \cdot y + \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow 6x + y + 2 = 0$

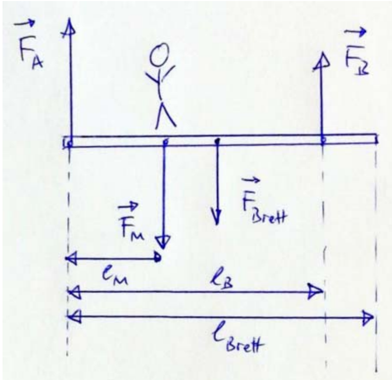
Aufgabe 5 (3 + 3 = 6 Punkte)

a) $f'(x) = 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} = \ln(x) + 1, f''(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}, f'''(x) = -x^{-2}$,
$f^{(4)}(x) = 2x^{-3}, f^{(5)}(x) = -6x^{-4}$
$\Rightarrow a_0 = \frac{f(1)}{0!} = 0, a_1 = \frac{f'(1)}{1!} = 1, a_2 = \frac{f''(1)}{2!} = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{f'''(1)}{3!} = -\frac{1}{6}, a_4 = \frac{f^{(4)}(1)}{4!} = \frac{1}{12}$,
$a_5 = \frac{f^{(5)}(1)}{5!} = -\frac{1}{20}$
$\Rightarrow p_5(x) = \sum_{i=0}^{5} a_i \cdot (x-1)^i$
$= 0 + (x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{6}(x-1)^3 + \frac{1}{12}(x-1)^4 - \frac{1}{20}(x-1)^5$

b) $a_0 = 0, a_1 = 1, a_i = \frac{f^{(i)}(1)}{i!} = \frac{(-1)^i \cdot (i-2)! \cdot 1^{-(i-1)}}{i!} = (-1)^i \cdot \frac{(i-2)!}{i!} = (-1)^i \cdot \frac{1}{(i-1) \cdot i}, i \geq 2$
$\Rightarrow p(x) = 0 + (x-1) + \sum_{i=2}^{\infty} (-1)^i \cdot \frac{1}{(i-1) \cdot i} \cdot (x-1)^i$
Konv.bereich: $\lim_{i \to \infty} \left|\frac{a_{i+1}}{a_i}\right| = \lim_{i \to \infty} \frac{\frac{1}{i \cdot (i+1)}}{\frac{1}{(i-1) \cdot i}} = \lim_{i \to \infty} \frac{(i-1) \cdot i}{i \cdot (i+1)} = \lim_{i \to \infty} \frac{i-1}{i+1} = 1$
$\Rightarrow R = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \widetilde{\mathbb{D}} =]1-1; 1+1[=]0; 2[$

Aufgabe 6 (1 + 2 + 3 = 6 Punkte)

$F_M = 765\text{N}$; $F_{Brett} = 235\text{N}$; $l_M = 2.9\text{m} - 1.2\text{m} = 1.7\text{m}$; $l_B = 2.9\text{m}+1.9\text{m}=4.8\text{m}$;
$l_{Brett} = 5.8\text{m}$;



a) siehe Skizze →

b) Kräfte:

$$F_A + F_B = F_M + F_{Brett}$$

Drehmomente bezüglich A:

$$F_M \cdot l_M + F_{Brett} \cdot \frac{l_{Brett}}{2} = F_B \cdot l_B$$

c) 2. Gleichung nach F_B auflösen:

$$F_B = \frac{1}{l_B} \cdot \left(F_M \cdot l_M + F_{Brett} \cdot \frac{l_{Brett}}{2} \right) = 413\text{N}$$

1. Gleichung nach F_A auflösen:

$$F_A = F_M + F_{Brett} - F_B = 587\text{N}$$

Aufgabe 7 (2 + 1 + 2 + 3 = 8 Punkte)

$h_A = 450'000\text{m}$; $h_B = 1'250'000\text{m}$; $r_E = 6'370'000\text{m}$; $m_E = 5.97 \cdot 10^{24}\text{kg}$;
$r_A = r_E + h_A = 6'820'000\text{m}$; $r_B = r_E + h_B = 7'620'000\text{m}$

a) Zentripetalkraft = Gravitationskraft

$$\frac{m \cdot v_A^2}{r_A} = G \cdot \frac{m \cdot m_E}{r_A^2} \quad \rightarrow \quad v_A = \sqrt{G \cdot \frac{m_E}{r_A}} = 7640\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

b) $T_A = \dfrac{2\pi \cdot r_A}{v_A} = 5610\text{s}$

c) Kepler III, Vergleich der Kreisbahn mit Ellipse:

$$a_{AB} = r_E + \frac{h_A + h_B}{2} = 7220\text{km}; \quad a_A = r_A = 6820\text{km}$$

$$\frac{a_{AB}^3}{T_{AB}^2} = \frac{a_A^3}{T_A^2} \quad \rightarrow \quad T_{AB} = \sqrt{\frac{a_{AB}^3}{a_A^3}} \cdot T_A = 6110\text{s}$$

Dauer: $T = \dfrac{T_{AB}}{2} = 3060\text{s}$

d) Energiesatz: $\dfrac{m \cdot v_A^2}{2} - G \cdot \dfrac{m \cdot m_E}{r_A} = \dfrac{m \cdot v_B^2}{2} - G \cdot \dfrac{m \cdot m_B}{r_B}$ (1)

Kepler II: $|\vec{v} \times \vec{r}| = konst. \quad \rightarrow \quad v_A \cdot r_A = v_B \cdot r_B$ (2)

Gleichung (2) nach v_B aufgelöst: $v_B = \dfrac{r_A}{r_B} \cdot v_A$

in (1) eingesetzt: $\dfrac{v_A^2}{2} - G \cdot \dfrac{m_E}{r_A} = \dfrac{r_A^2 \cdot v_A^2}{2r_B^2} - G \cdot \dfrac{m_E}{r_B}$

→ $G \cdot m_E \cdot \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right) = \frac{{v_A}^2}{2} \cdot \left(1 - \frac{{r_A}^2}{{r_B}^2} \right)$

→ $v_A = \sqrt{\frac{2G \cdot m_E \cdot \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right)}{\frac{{r_A}^2}{{r_B}^2} - 1}} = \sqrt{2G \cdot m_E \cdot \frac{r_B}{r_B \cdot (r_A + r_B)}} = 7'850 \, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

Aufgabe 8 (3 + 2 + 4 = 9 Punkte)

$R = 12\Omega$; $L = 35\mathrm{mH}$; $C = 10\mu\mathrm{F}$; $U_0 = 12\mathrm{V}$;
$I(t)$: Stromstärke im Stromkreis; $Q(t)$: Ladung im Kondensator

a) Maschenregel: $U_R + U_L + U_C = 0$ → $R \cdot I + L \cdot \dot{I} + \frac{Q}{C} = 0$

mit $I = \dot{Q}$: $R \cdot \dot{Q} + L \cdot \ddot{Q} + \frac{Q}{C} = 0$

mit $Q = C \cdot U_C$: $R \cdot \dot{U}_C + L \cdot \ddot{U}_C + \frac{U_C}{C} = 0$ bzw. $\ddot{U}_C + \frac{R}{L} \cdot \dot{U}_C + \frac{1}{L \cdot C} \cdot U_C = 0$

Das ist die Differenzialgleichung der freien gedämpften Schwingung, siehe Formelsammlung S. 82:
$\ddot{y} + 2\delta \cdot \dot{y} + {\omega_0}^2 \cdot y = 0$

mit $\delta = \frac{R}{2L}$ und ${\omega_0}^2 = \frac{1}{L \cdot C}$.

b) Formelsammlung S. 82: $\omega = \sqrt{{\omega_0}^2 - \delta^2} = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C} - \frac{R^2}{4L^2}} = 1680\mathrm{s}^{-1}$

$T = \frac{2\pi}{\omega} = 3.74\mathrm{ms}$

c) $t = 5.5\mathrm{ms}$

Allgemeine Lösung der DGL: $U_C(t) = e^{-\delta \cdot t} \cdot \left(\hat{U}_{C1} \cdot \sin(\omega \cdot t) + \hat{U}_{C2} \cdot \cos(\omega \cdot t) \right)$

mit den Integrationskonstanten $\hat{U}_{C1}$ und $\hat{U}_{C2}$, die aus den Startbedingungen bestimmt werden:

1.) $U_C(0) = U_0 = \hat{U}_{C2}$

2.) $I(0) = 0 \Rightarrow \dot{Q}(0) = 0 \Rightarrow \dot{U}_C(0) = 0$

$\dot{U}_C(t) = -\delta \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \left(\hat{U}_{C1} \cdot \sin(\omega \cdot t) + \hat{U}_{C2} \cdot \cos(\omega \cdot t) \right) + \omega \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \left(\hat{U}_{C1} \cdot \cos(\omega \cdot t) - \hat{U}_{C2} \cdot \sin(\omega \cdot t) \right)$

$0 = -\delta \cdot \hat{U}_{C2} + \omega \cdot \hat{U}_{C1} = -\delta \cdot U_0 + \omega \cdot \hat{U}_{C1}$

$\Rightarrow \hat{U}_{C1} = \frac{\delta}{\omega} \cdot U_0$

$\Rightarrow U_C(t) = e^{-\delta \cdot t} \cdot \left(\frac{\delta}{\omega} \cdot U_0 \cdot \sin(\omega \cdot t) + U_0 \cdot \cos(\omega \cdot t) \right)$

Einsetzen: $U_C(t = 0.0055\mathrm{s}) = -4.51\mathrm{V}$

Aufgabe 9 (1 + 1 + 1 + 2 + 2 = 7 Punkte)

$U_B = 80\,\mathrm{kV}$; $e = 1.60\cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$; $m_e = 9.11\cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$ (Ruhemasse)

a) $E_{kin} = e\cdot U_B = 1.28\cdot 10^{-14}\,\mathrm{J}$

b) $E = E_0 + E_{kin} = m_e\cdot c^2 + E_{kin} = 9.48\cdot 10^{-14}\,\mathrm{J}$

c) $E = m\cdot c^2 \quad\Rightarrow\quad m = \dfrac{E}{c^2} = 1.05\cdot 10^{-30}\,\mathrm{kg}$

d) $\gamma = \dfrac{E}{E_0} = \dfrac{m}{m_e} = 1.16$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{\gamma^2} = 1-\frac{v^2}{c^2} \quad\Rightarrow\quad \frac{v}{c} = \sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}} = 0.507$$

$v = 0.507c = 1.52\cdot 10^{8}\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

e) $s = 0.085\,\mathrm{m}$

Flugzeit im Labor-System: $t = \dfrac{s}{v} = 5.59\cdot 10^{-10}\,\mathrm{s}$

Flugzeit im Ruhesystem der Elektronen (Eigenzeit der Elektronen): $t' = \dfrac{t}{\gamma} = 4.82\cdot 10^{-10}\,\mathrm{s}$