1 Differenzialrechnung (1P, 2P, 3P)

a) $p(x) = \frac{1}{4}x^2 - 3x + 10$ $p'(x) = \frac{1}{2}x - 3 = 0$ $x = 6 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{A(2|1)}$

b) $t \perp (g\colon y = -0.5x + 3.75)$ t hat die Steigung 2
$p'(x) = \frac{1}{2}x - 3 = 2$ $x = 10 \quad p(10) = 5$ $B(10|5)$ Berührungspunkt
Ansatz für t: $y = 2x + c$ Gleichung für die Tangente t: $\boldsymbol{y = 2x - 15}$

c) $U(x) = 2x + 2 \cdot (0.25\,x^2 - 3x + 10) = 0.5x^2 - 4x + 20$ $x > 0$
$U'(x) = x - 4 = 0$ $x = 4$
$U''(x) = 1 > 0$ lokales und absolutes Minimum bei $x = 4$
$U(4) = 12$ minimaler Umfang des Rechtecks $\boldsymbol{U_{min} = 12}$

2 Integralrechnung (2P, 2P, 2P, 3P)

a) $f(x) = e^{0.5x-1}$ Tangente t: $y = 0.5x$ mit der Steigung 0.5
$f'(x) = 0.5 \cdot e^{0.5x-1} = 0.5 \quad \Rightarrow$ $e^{0.5x-1} = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 2$ $f(2) = 1 \quad \Rightarrow \quad B(2|1)$
Im Punkt $B(2|1)$ hat der Graph von f die Steigung 0.5
$B \in t$, da $1 = 0.5 \cdot 2$ q.e.d.

b) Flächeninhalt $A = \int_0^2 (e^{0.5x-1} - 0.5x)dx = [2 \cdot e^{0.5x-1} - 0.25x^2]_0^2 = 2 \cdot e^0 - 1 - (2 \cdot e^{-1} - 0)$
$A = \boldsymbol{1 - \frac{2}{e}} \approx 0.264$

c) $\int_a^0 e^{0.5x-1}dx = [2 \cdot e^{0.5x-1}]_a^0 = 2 \cdot e^{-1} - 2 \cdot e^{0.5a-1}$
$\lim_{a \to -\infty}(2 \cdot e^{-1} - 2 \cdot e^{0.5a-1}) = \frac{2}{e} - 0 = \boldsymbol{\frac{2}{e}} \approx 0.736$ (endlicher Flächeninhalt vorhanden)

d) $V = \Pi \cdot \int_0^c (e^{0.5x-1})^2 dx = \Pi \cdot \int_0^c e^{x-2}dx = \Pi \cdot [e^{x-2}]_0^c = \pi \cdot (e^{c-2} - e^{-2}) = \pi \cdot \left(e^2 - \frac{1}{e^2}\right)$
$\boldsymbol{c = 4}$

3 Arithmetische Zahlenfolge (3P)

$s_n = 1 + 7 + 13 + \cdots + x = 280$ $\rightarrow$ AF mit $a_1 = 1$, $a_n = x$ und $d = 6$
$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ $x = 1 + (n-1) \cdot 6 = 6n - 5$ (*)
$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ $280 = \frac{n}{2}(1 + x) = \frac{n}{2}(1 + 6n - 5) = 3n^2 - 2n$
Die Gleichung $3n^2 - 2n - 280 = 0$ hat die Lösungen $n_1 = 10$ und $n_2 = \frac{-28}{3}$
Es kommt nur $n_1 = 10$ in Frage. Wegen (*) resultiert $\boldsymbol{x = 55}$

4 Gebrochenrationale Funktion (3P)

$f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ $f'(x) = \frac{2x \cdot (x+1) - x^2 \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -2,\ x_2 = 0$
Der Graph von f hat in den Punkten $\boldsymbol{P(-2|-4)}$ und in $\boldsymbol{Q(0|0)}$ horizontale Tangenten.

5 Wahrscheinlichkeitsrechnung (4P, 2P, 4P)

a) **P(A)** = 0.35·0.4 = **0.14**

P(B) = $\binom{20}{7} \cdot 0.4^7 \cdot 0.6^{13} = \mathbf{0.1659}$ (Binomialverteilung mit n=20, p = 0.4 und k=7)

Dieser Wert kann auch der entsprechenden beiliegenden Tabelle entnommen werden.

P(C) = P(X ≥ 8) = 1 – P(X ≤ 7) = 1 – 0.4159 {Wert aus der Tabelle}= **0.5841**

P(D) = $0.77^6 \cdot 0.23 = \mathbf{0.0479}$

b) P(keine von n Personen interessiert sich für ein Rennrad) = 0.98^n

P(mindestens eine von n Personen interessiert sich für ein Rennrad) = $1 - 0.98^n$

$1 - 0.98^n > 0.9 \;\Rightarrow\; 0.98^n < 0.1$ $\qquad n > \frac{\ln(0.1)}{\ln(0.98)} = 113.974$

Es müssen sich **mindestens 114** Kaufinteressenten informieren.

c) X = Verkaufspreis für ein Fahrrad in Franken.

Verteilung für X:

Typ	Citybike	Mountainbike	Trekkingbike	Rennrad
$X = x_i$	300	350	400	1000
$P(X = x_i)$	0.40	0.35	0.23	0.02

E(X) = $300 \cdot 0.4 + 350 \cdot 0.35 + 400 \cdot 0.23 + 1000 \cdot 0.02 = 354.5$

Oskar Rademacher kann im Mittel **354.5 Franken** pro verkauftes Fahrrad erwarten.

E*(X) = $1.04 \cdot 354.5 = 368.68$

E*(X) = $(300 + z) \cdot 0.4 + 350 \cdot 0.35 + 400 \cdot 0.23 + 1000 \cdot 0.02 = 354.5 + 0.4 \cdot z = 368.68$

$z = 14.18 : 0.4 = 35.45$ Der erhöhte mittlere Verkaufspreis beträgt **335.45 Franken**.

6 Beurteilende Statistik (3P, 1P)

a) X: Anzahl Wähler der Partei A, n = 100

H_0: $p_0 \le 0.2$, H_1: $p > 0.2$, rechtsseitiger Test $\alpha = 5\%$

Gesucht ist der kleinst mögliche Wert k_R, so dass $P(X \ge k_R) \le 0.05$ ist. V = $\{k_R, k_{R+1}, \dots , 100\}$

Besser mit dem Annahmebereich:

Gesucht ist die kleinst mögliche Zahl k*, so dass P(X ≤ k*) > 0.95 ist. ($k^* = k_{R-1}$)

Die Tabelle liefert k* = 27

P(X ≤ 26) = 0.9442 , P(X ≤ 27) = 0.9658

P(X ≥ 27) = 0.0558 , P(X ≥ 28) = 0.0342 **V = {28, 29, ... , 100}**

Entscheidungsregel: Ist X ≤ 27, wird H_0 angenommen. Ist X ≥ 28, wird H_0 verworfen.

b) Mit X = 24 Wähler der Partei A kann H_0 nicht verworfen werden. Es sollte eine weitere Kampagne durchgeführt werden.

7 Vektorgeometrie (1P, 2P, 2P, 3P, 3P)

a) Gegeben ist die Gerade $g\colon \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Anderer Stützpunkt, z.B. t = 1. Kollinearer Richtungsvektor. $\Rightarrow$ $g\colon \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$

b) Schnittpunkt mit der Ebene y = 0: $y = -1 + 2t = 0 \Leftrightarrow t = 0.5 \Rightarrow \boldsymbol{S_3(1.5|0|2)}$

Schnittwinkel: $\varepsilon = arcsin \frac{\left|\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{21} \cdot 1} = \frac{2}{\sqrt{21}} \approx \boldsymbol{25.88°}$

c) $P(1|4|-2), \quad E = (g, P)$ $\qquad E\colon \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{r|c|} I & x = 2 - u + v \\ II & y = -1 + 2u - 5v \\ III & z = 4u + 2v \end{array}$$

$2 \cdot I + II\colon\ 2x + y = 3 - 3v \ (IV)$

$III - 2 \cdot II\colon\ z - 2y = 2 + 12v \ (V)$

$4 \cdot IV + V\colon 8x + 2y + z = 14$

$\boldsymbol{E\colon 8x + 2y + z - 14 = 0}$

d) $Q(x|0|0)$ $\qquad \overline{PQ} = 2 \cdot \overline{OP}$

$\sqrt{(x-1)^2 + 16 + 4} = 2 \cdot \sqrt{1 + 16 + 4}$

$(x-1)^2 + 20 = 4 \cdot 21$

$(x-1)^2 = 64$ $\qquad |x - 1| = 8$

$x_1 = -7, \qquad x_2 = 9$

2 Lösungen für Q $\qquad \boldsymbol{Q_1(-7|0|0)}, \qquad \boldsymbol{Q_2(9|0|0)}$

e) $\begin{pmatrix} 2 \\ -a \\ a-3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad -2 - 2a + 4a - 12 = 0 \Leftrightarrow a = 7$

Gerade $h\colon \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -12 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\qquad h = g \Rightarrow \begin{array}{r|c|} I & 2 + 2u = 2 - t \\ II & 2 - 7u = -1 + 2t \end{array}$

$2 \cdot I + II\colon\ 6 - 3u = 3 \ \Leftrightarrow\ u = 1$ $\qquad 4 = 2 - t \ \Leftrightarrow\ t = -2$

Kontrolle: $-12 + 1 \cdot 4 = 0 - 2 \cdot 4 \ \Leftrightarrow\ -8 = -8$ (wahre Aussage)

Schnittpunkt: $\vec{r}_S = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -12 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -8 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{S(4|-5|-8)}$