

Kantonsschule Reussbühl Luzern

## Schwerpunktfach Physik und Anwendungen der Mathematik

Prüfende Lehrpersonen	Hannes Ernst ( <a href="mailto:hannes.ernst@edulu.ch">hannes.ernst@edulu.ch</a> ) Dr. Luigi Brovelli ( <a href="mailto:luigi.brovelli@edulu.ch">luigi.brovelli@edulu.ch</a> )
Klasse	6ack
Prüfungdatum	23. Mai 2017
Prüfungsdauer	3 Stunden
Erlaubte Hilfsmittel	Taschenrechner "TI voyage 200" und "TI-30" Formelsammlungen Mathematik und Physik (A. Wetzel) mit Beiblättern
Anweisungen zur Lösung der Prüfung	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Verwenden Sie für jede Aufgabe einen neuen Bogen.</li> <li>• Der Lösungsweg muss in jeder Aufgabe gut dokumentiert sein.</li> <li>• Wenn der Taschenrechner für algebraische Umformungen oder mit speziellen Funktionen benutzt wird, soll dies deklariert werden. Beachten Sie bei den einzelnen Aufgaben jeweils die besonderen Hinweise zur Benutzung des Taschenrechners.</li> <li>• Alle verwendeten Symbole sind zu definieren (sofern nicht im Aufgabentext definiert).</li> <li>• Physikalische Formeln, welche nicht der Formelsammlung entnommen werden, sind zu beweisen oder zu begründen.</li> </ul>
Anzahl erreichbarer Punkte	<p>Aufgabe 1: 8  Aufgabe 2: 4  Aufgabe 3: 6  Aufgabe 4: 8  Aufgabe 5: 4  Aufgabe 6: 7  Aufgabe 7: 8  Aufgabe 8: 8  Aufgabe 9: 7</p> <p>Total: 60</p> <p>Notenmassstab: 48 Punkte = Note 6</p>
Anzahl Seiten (inkl. Titelblatt)	4

**Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!**

**Aufgabe 1: Vektorgeometrie (2 + 2 + 4 = 8 Punkte)**

Die Ebene  $E: 2x + y + 2z = 24$  und die Kugel  $K$  mit Mittelpunkt  $M(1/5/-5)$  und Radius  $r = 15$  schneiden sich.

- Berechnen Sie den Mittelpunkt  $M'$  des Schnittkreises  $k'$ . *{zur Kontrolle:  $M'(7/8/1)$ }*
- Zeigen Sie, dass der Punkt  $A(3/0/9)$  auf  $k'$  liegt.
- Die Punkte  $B, C$  und  $D$  sollen ebenfalls auf dem Schnittkreis  $k'$  liegen. Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte  $B, C$  und  $D$  so, dass das Viereck  $ABCD$  ein Quadrat ist.

**Aufgabe 2: Vollständige Induktion (4 Punkte)**

Beweisen Sie die nachstehende Aussage durch vollständige Induktion:  
 $7^n - 2^n$  ist für alle  $n \in \mathbb{N}$  durch 5 teilbar.

**Aufgabe 3: Potenzreihen (3 + 3 = 6 Punkte)**

Gegeben ist die Funktion  $f(x) = \frac{1}{1+4x}$

- Bestimmen Sie für die Funktion  $f$  das quadratische Maclaurin-Polynom  $M_2(x)$ , indem Sie die Definition für Maclaurin-Polynome verwenden.  
*Besonderer Hinweis: der Taschenrechner v200 darf zum Ableiten **nicht** benutzt werden.*
- Schreiben Sie  $f(x)$  als Potenzreihe  $P(x)$  und bestimmen Sie den Konvergenzbereich.  
Drücken Sie dabei  $P(x)$  mit dem Summenzeichen aus.

**Aufgabe 4: Differenzialgleichungen (3 + 2 + 3 = 8 Punkte)**

*Besonderer Hinweis: deSolve (v200) darf nur zur Kontrolle benutzt werden.*

- Lösen Sie die Differenzialgleichung  $y'' + 2y' + 5y = 0$ .
- Berechnen Sie die Lösung der Differenzialgleichung  $y'' + 2y' + 5y = e^{3x}$ .  
Hinweis: Benutzen Sie den Ansatz  $y_p = A \cdot e^{3x}$ .
- Lösen Sie das Anfangswertproblem  $y'' + 2y' + 5y = 0$  mit  $y(0) = 1$  und  $y'(0) = 0$ .

**Aufgabe 5: Normalverteilung (2 + 2 = 4 Punkte)**

Eine Maschine stellt Bauteile her, von denen durchschnittlich 3% fehlerhaft sind.

Die Tagesproduktion der Maschine beträgt 2000 Bauteile.

*Hinweis: Die Binomialverteilung muss jeweils durch die Standardnormalverteilung approximiert werden.*

- Mit welcher Wahrscheinlichkeit enthält die Tagesproduktion höchstens 70 fehlerhafte Bauteile?
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit weicht die Anzahl der fehlerhaften Teile einer Tagesproduktion höchstens 10% vom Erwartungswert ab?

**Aufgabe 6: Kreisbewegung (2 + 3 + 2 = 7 Punkte)**

Sie bewegen sich auf dem Sitz eines Kettenkarussells. Ihre Masse beträgt zusammen mit der Masse des Sitzes 78kg. Der Befestigungshaken der Kette befindet sich im Abstand von 4.5m von der Drehachse, die Kette hat eine Länge von 3.2m. Die Kette bildet zur Vertikalen einen Winkel von  $48^\circ$ .

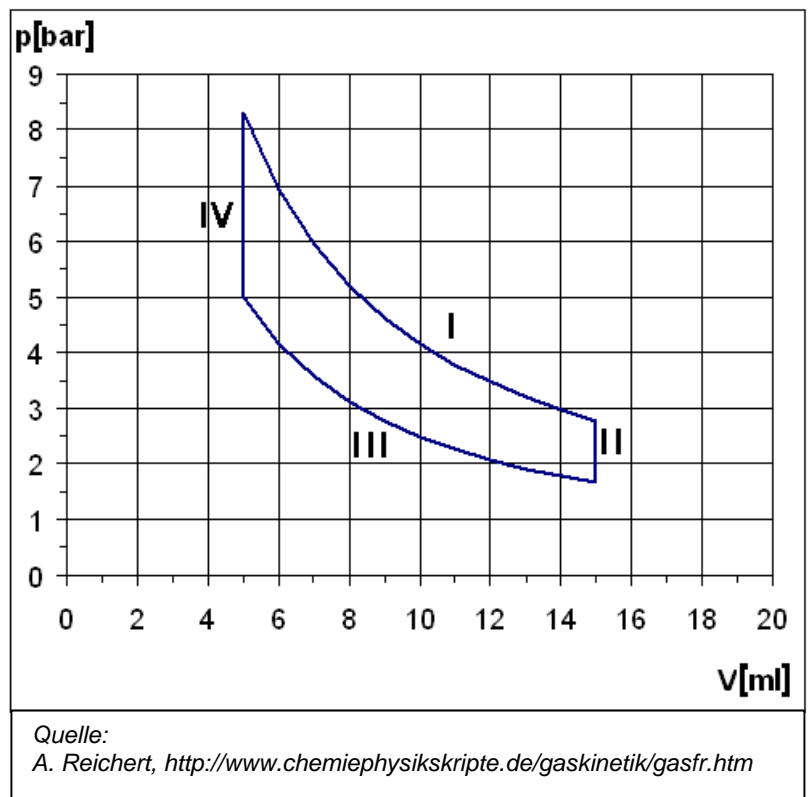
- Erstellen Sie eine Skizze der Situation und zeichnen Sie alle auf den Sitz wirkenden Kräfte sowie die resultierende Gesamtkraft ein.
- Wie lange dauert eine Umdrehung des Karussells?
- Mit welcher Kraft ist die Kette belastet?

**Aufgabe 7: Wärmelehre (2 + 2 + 2 + 2 = 8 Punkte)**

Der Kreisprozess eines Stirling-Motors kann idealisiert mit zwei isochoren und zwei isothermen Prozessschritten beschrieben werden (siehe nebenstehendes  $p$ - $V$ -Diagramm).

Der Zylinder des Motors ist mit  $9 \cdot 10^{-4}$  mol Stickstoff gefüllt. Die weiteren Angaben entnehmen Sie dem Diagramm.

- Begründen Sie, dass es sich im Diagramm bei I und III tatsächlich um isotherme Prozessschritte handelt und berechnen Sie die beiden Temperaturen.
- Berechnen Sie die insgesamt in einem Kreisprozess vom Arbeitsgas verrichtete Arbeit.
- Berechnen Sie die insgesamt in einem Kreisprozess zugeführte Wärme.
- Berechnen Sie den bei den gegebenen Temperaturen maximal möglichen Wirkungsgrad und erklären Sie, wie dieser im Stirling-Motor zumindest theoretisch erreicht werden könnte.



**Aufgabe 8: Differenzialgleichungen (4 + 4 = 8 Punkte)**

Ein «Spielzeug-Raketenfahrzeug» wird mit einem Luftballon angetrieben (siehe Abbildung). Es kann sich auf einer langen Strecke ungehindert bewegen. Wir machen folgende vereinfachende Annahmen:

- Die Masse des Fahrzeugs ist konstant und beträgt 0.2kg.
  - Die Schubkraft des Ballons ist ebenfalls konstant und beträgt 0.8N.
  - Der Ballon übt diese Kraft während einer Zeit von 3 Sekunden aus (bis er leer ist).
  - Während der ganzen Bewegung wirkt eine zur Geschwindigkeit proportionale Luftreibungskraft  $F_R = -k \cdot v$  mit  $k = 0.2 \text{Ns/m}$ .
  - Es wirken sonst keine Roll- oder Gleitreibungskräfte.
  - Der Wagen startet ohne Anfangsgeschwindigkeit.
- a) Berechnen Sie die Geschwindigkeit und die zurückgelegte Strecke am Ende der «Brenndauer», d.h. für  $t = 3\text{s}$ .
- b) Berechnen Sie die Strecke, welche das Fahrzeug insgesamt zurücklegt.



Quelle: [ch.opitec.com](http://ch.opitec.com)

**Aufgabe 9: Relativitätstheorie (1 + 2 + 1 + 1 + 2 = 7 Punkte)**

Ein utopisches Raumschiff fliegt mit konstanter Geschwindigkeit an der Erde vorbei. Genau in diesem Moment zeigen eine Uhr im Raumschiff und eine Uhr auf der Erde die Zeit „0 Sekunden“ an. Das Raumschiff fliegt weiter und erreicht eine Raumstation, die relativ zur Erde in Ruhe ist und eine Uhr hat, die mit der Uhr auf der Erde synchronisiert ist (d.h. sie wurde im Bezugssystem Raumstation-Erde gleichzeitig mit der Uhr auf der Erde gestartet). Die Raumstation hat, gemessen im Bezugssystem Erde-Raumstation, eine Entfernung von 100 Lichtsekunden (= 30'000'000 km) von der Erde. Beim Vorbeiflug des Raumschiffes zeigt die Uhr der Raumstation die Zeit „125 Sekunden“ an.

- a) Wie gross ist die Geschwindigkeit des Raumschiffs (in m/s oder in Prozent von  $c$ )?
- b) Welche Zeit zeigt die Uhr des Raumschiffs beim Vorbeiflug an?
- c) Wie gross ist die Distanz zwischen Erde und Raumstation im Bezugssystem des Raumschiffs (in Lichtsekunden)?
- d) Wie viel Zeit ist auf der Erde und in der Raumstation während des Flugs vergangen, gemessen im Bezugssystem des Raumschiffs?
- e) Wenn Sie das Resultat von d) mit der Zeit vergleichen, welche die Uhr der Raumstation beim Vorbeiflug anzeigt, ergibt sich ein Widerspruch. Wie löst sich dieser auf?  
Hinweis: Was können Sie über die Zeit aussagen, welche die Raumstation in dem Moment anzeigt, in welchem das Raumschiff an der Erde vorbeifliegt, und zwar im Bezugssystem des Raumschiffs?