Schwerpunktfach Physik und Anwendungen der Mathematik: Lösungen

Aufgabe 1: Vektorgeometrie (2 + 2 + 4 = 8 Punkte)

a) Normale n zu E: 2x + y + 2z = 24 durch M(1/5/-5). $n\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$\mathrm{n} \cap \mathrm{E} \;\Rightarrow\; 2(1+2t)+5+t+2(-5+2t)=24 \;\Rightarrow\; 9t=27 \;\Rightarrow\; t=3$

<u>M'(7/8/1)</u>

b) A(3/0/9) in E : 14 + 8 + 2 = 24 ✓ $\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} 1-3 \\ 5-0 \\ -5-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -14 \end{pmatrix}$, $|\overrightarrow{AM}| = 15 = r_K$ ✓

c) $\overrightarrow{AM'} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -8 \end{pmatrix}$ mit Betrag 12. $\vec{C} = \overrightarrow{M'} + \overrightarrow{AM'} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 16 \\ -7 \end{pmatrix}$. <u>C(11/16/-7)</u>

Richtungsvektor $\vec{v}$ für $\overline{BD}$: $\vec{v} \perp \vec{n}$ sowie $\vec{v} \perp \overrightarrow{AM'}$ $\vec{v}* = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\vec{v} = \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$ hat den Betrag 12. $\vec{B} = \overrightarrow{M'} + \vec{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 16 \\ 5 \end{pmatrix}$. <u>B(-1/16/5)</u>

$\vec{D} = \overrightarrow{M'} - \vec{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$. <u>D(15/0/-3)</u>

Aufgabe 2: Vollständige Induktion (4 Punkte)

Verankerung (n=1) $7^1 - 2^1 = 5$ ist durch 5 teilbar.

Vererbung

i) Annahme (n=k) $7^k - 2^k = 5x\,,\; x \in \mathbb{N}$

ii) Behauptung (n=k+1) $7^{k+1} - 2^{k+1} = 5y\,,\; y \in \mathbb{N}$

iii) Beweis $7^{k+1} - 2^{k+1} = 7\cdot 7^k - 2\cdot 2^k = 5\cdot 7^k + 2\cdot(7^k - 2^k) = 5z + 2\cdot 5x$

$= 5\cdot(z+2x) = 5\cdot y \;\; mit \;\; y \in \mathbb{N}$ w.z.b.w.

Aufgabe 3: Potenzreihen (3 + 3 = 6 Punkte)

a) $f(x) = \frac{1}{1+4x}$ $f(0) = 1$

$f'(x) = 4\cdot(-1)\,(1+4x)^{-2} = \frac{-4}{(1+4x)^2}$ $f'(0) = -4$

$f''(x) = 4\cdot(-4)\cdot(-2)\,(1+4x)^{-3} = \frac{32}{(1+4x)^3}$ $f''(0) = 32$

$M_2(x) = 1 + \frac{-4}{1!}\,x + \frac{32}{2!}\,x^2 = 1 - 4x + 16x^2$

b) Geometrische Potenzreihe. $\frac{1}{1+4x} = \frac{a_1}{1-q} \;\Rightarrow\; a_1 = 1\,,\;\; q = -4x$

$P(x) = 1 - 4x + 16\,x^2 - 64\,x^3 + - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}(-4x)^k$

Konvergenz bei geometrischen Potenzreihen für $|q| < 1$, hier: $|-4x| < 1$

$|x| < 0.25$: Konvergenzbereich von *P(x)*

Aufgabe 4: Differenzialgleichungen (3 + 2 + 3 = 8 Punkte)

a) Lineare DGL $y'' + 2y' + 5y = 0$ $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0 \;\leftrightarrow\; \lambda^2 + 2a\lambda + b = 0$

$a = 1\,,\; b = 5 \qquad a^2 - b < 0$

$\omega = \sqrt{b - a^2} = 2$

2 konj. komplexe Lösungen der char. Gleichung $\lambda_{1,2} = -1 \pm 2i$

$y_h(x) = e^{-x}\,(C_1 \cdot \sin(2x) + C_2 \cdot \cos(2x))$ <u>Lösung der homogenen DGL</u>

b) Ansatz: $y_p = A \cdot e^{3x} \;\Rightarrow\; y'_p = 3A \cdot e^{3x} \;\Rightarrow\; y''_p = 9A \cdot e^{3x}$ in die inhomogene DGL einsetzen

$9A \cdot e^{3x} + 6A \cdot e^{3x} + 5A \cdot e^{3x} = e^{3x}$ $20A = 1 \;\Rightarrow\; A = 0.05 \;\Rightarrow\; y_p = 0.05 \cdot e^{3x}$

$y(x) = y_h + y_p = e^{-x}\,(C_1 \cdot \sin(2x) + C_2 \cdot \cos(2x)) + 0.05 \cdot e^{3x}$ <u>Lsg. der inhomogenen DGL</u>

c) $y(0) = 1 \;\curvearrowright\; y_h(x)$: $1 = e^0(C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1) \;\Rightarrow\; C_2 = 1$

$y(x) = e^{-x}\,(C_1 \cdot \sin(2x) + \cos(2x))$

$y'(x) = -\,e^{-x}\,(C_1 \cdot \sin(2x) + \cos(2x)) + e^{-x}\,(2 \cdot C_1 \cdot \cos(2x) - 2 \cdot \sin(2x))$

$y'(0) = -\,e^0\,(0 + 1) + e^0\,(2 \cdot C_1 \cdot 1 - 0) = 0 \qquad \Rightarrow -1 + 2 \cdot C_1 = 0 \;\Rightarrow\; C_1 = 0.5$

$y(x) = e^{-x}\,(0.5 \cdot \sin(2x) + \cos(2x))$ <u>Lösung des Anfangswertproblems</u>

Aufgabe 5: Normalverteilung (2 + 2 = 4 Punkte)

a) Binomialverteilung mit n = 2000 und p = 0.03 . $E(X) = 60$, $\sigma(X) = \sqrt{60 \cdot 0.97} \approx 7.6289$

$P(X \leq 70) = ?$

Transformation $X \to U$, $u_0 = \frac{70.5-60}{\sigma(X)} \approx 1.3763$, $\Phi(1.3763) \approx 0.9156$

$P(X \leq 70) \approx 0.9156$

b) $E(X) \pm 10\%$, also $X \in \{54, 55, \ldots, 65, 66\}$

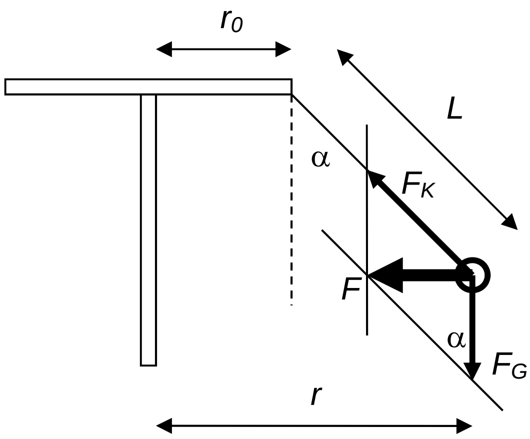
$P(54 \leq X \leq 66) = ?$

$u_2 = \frac{66.5-60}{\sigma(X)} \approx 0.8520$, $\Phi(0.8520) \approx 0.8029$

$u_1 = \frac{53.5-60}{\sigma(X)} \approx -0.8520$, $\Phi(-0.8520) \approx 0.1971$

$\Phi(u_2) - \Phi(u_1) \approx P(54 \leq X \leq 66) \approx 0.6058$

Aufgabe 6: Kreisbewegung (2 + 3 + 2 = 7 Punkte)



$r_0 = 4.5\text{m}$; $L = 3.2\text{m}$; $\alpha = 48°$; $m = 78\text{kg}$

a) Siehe Skizze →

b) $r = r_0 + L \cdot \sin\alpha = 6.88\text{m}$

$$F = F_G \cdot \tan\alpha = m \cdot g \cdot \tan\alpha$$

$$F = \frac{m \cdot v^2}{r}$$

$$m \cdot g \cdot \tan\alpha = \frac{m \cdot v^2}{r}$$

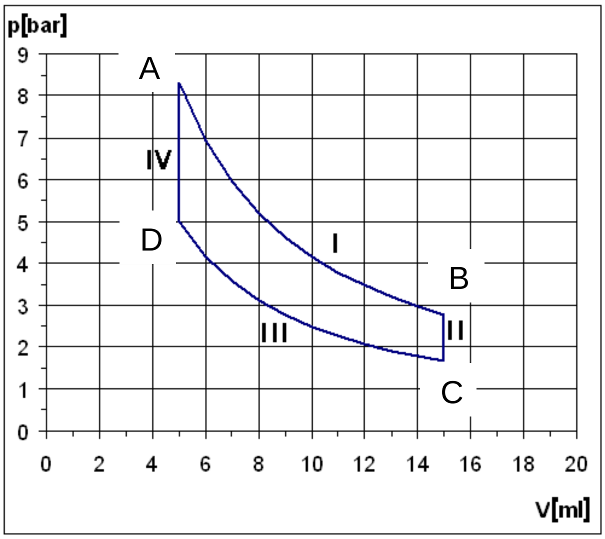
$$v = \sqrt{g \cdot r \cdot \tan\alpha} = 8.66\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\rightarrow \quad T = \frac{2\pi \cdot r}{v} = 4.99\text{s}$$

c)

$$\frac{F_G}{F_K} = \cos\alpha \quad \Longrightarrow \quad F_K = \frac{F_G}{\cos\alpha} = \frac{m \cdot g}{\cos\alpha} = 1'140\text{N}$$

Aufgabe 7: Wärmelehre (2 + 2 + 2 + 2 = 8 Punkte)



$n = 9 \cdot 10^{-4}\text{mol}$;
Diagramm:
$V_A = V_D = 5\text{ml} = 5 \cdot 10^{-6}\text{m}^3$;
$V_B = V_C = 15\text{ml} = 1.5 \cdot 10^{-5}\text{m}^3$;
$p_A = 8.4\text{bar} = 840'000\text{Pa}$; $p_B = 2.8\text{bar} = 280'000\text{Pa}$;
$p_C = 1.67\text{bar} = 167'000\text{Pa}$; $p_D = 5.0\text{bar} = 500'000\text{Pa}$

a) Für die Prozesse I und III gilt (Boyle-Mariotte):
$p \sim 1/V$ bzw.
$p_A \cdot V_A = p_B \cdot V_B$ und $p_C \cdot V_C = p_D \cdot V_D$

Zustandsgleichung:

$$T_A = T_B = \frac{p_A \cdot V_A}{n \cdot R} = \frac{p_B \cdot V_B}{n \cdot R} = 562\text{K}$$

$$T_C = T_D = \frac{p_C \cdot V_C}{n \cdot R} = \frac{p_D \cdot V_D}{n \cdot R} = 334\text{K}$$

b)

$$W_I = -n \cdot R \cdot T_A \cdot \log\left(\frac{V_B}{V_A}\right) = -4.62\text{J}; \; W_{III} = -n \cdot R \cdot T_C \cdot \log\left(\frac{V_D}{V_C}\right) = 2.74\text{J}$$

$$W = W_I + W_{III} = -1.87\text{J}$$

c) Stickstoff: $C_V = C_p - R = 20.8\,\frac{\text{J}}{\text{mol}\cdot\text{K}}$

$$Q_I = -W_I = 4.62\text{J}; \;\; Q_{IV} = C_V \cdot n \cdot (T_A - T_D) = 4.27\text{J}; \;\; Q = Q_I + Q_{IV} = 8.88\text{J}$$

d) Thermodynamischer Wirkungsgrad:

$$\eta = 1 - \frac{T_C}{T_A} = 40.6\%$$

Er kann im Stirling-Motor zumindest theoretisch erreicht werden, indem Q_{II} nicht an die Umgebung abgegeben, sondern vom Verdrängerkolben aufgenommen wird. Dieser kann diese «zwischengespeicherte» Wärme im Schritt IV wieder an das Gas abgeben, da $Q_{II} = -Q_{IV}$.

Der Wirkungsgrad des Motors ist dann:

$$\eta = \frac{-W}{Q_I} = \frac{T_A - T_C}{T_A} = 1 - \frac{T_C}{T_A} = 40.6\%$$

Aufgabe 8: Differenzialgleichungen (4 + 4 = 8 Punkte)

$m = 0.2\mathrm{kg}$; $F_{Schub} = 0.8\mathrm{N}$; $k = 0.2\mathrm{Ns/m}$; $t_{Schub} = 3\mathrm{s}$.
Bemerkung: In den Zwischenrechnungen werden Standardeinheiten weggelassen.

a) Differenzialgleichung der Bewegung für $0 \le t \le t_{Schub}$:

$$m \cdot a = F_{Schub} + F_R$$
$$\dot{v} = \frac{F_{Schub}}{m} - \frac{k}{m} \cdot v$$
$$\dot{v} = 4 - 1 \cdot v$$

Allgemeine Lösung der DGL:

$$v(t) = v^* \cdot e^{-t} + 4$$

Partikuläre Lösung der DGL mit $v(0) = 0\mathrm{m/s}$:

$$v(0) = v^* + 4 \quad \Rightarrow \quad v^* = -4$$
$$\Rightarrow v(t) = 4 - 4 \cdot e^{-t}$$

$$v(3s) = 3.80\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Strecke (berechnet mit dem V-200):

$$s(t) = \int_0^3 v(t')dt' = \int_0^3 (4 - 4 \cdot e^{-t'})dt' = 8.20\mathrm{m}$$

b) Differenzialgleichung der Bewegung für $t > t_{Schub}$ (Zeitnullpunkt neu gesetzt):

$$m \cdot a = F_R$$
$$\dot{v} = -\frac{k}{m} \cdot v$$
$$\dot{v} = -1 \cdot v$$

Allgemeine Lösung der DGL:

$$v(t) = v^* \cdot e^{-t}$$

Partikuläre Lösung der DGL mit $v(0) = 3.8\mathrm{m/s}$:

$$v(0) = v^* \quad \Rightarrow \quad v^* = 3.8$$
$$\Rightarrow v(t) = 3.8 \cdot e^{-t}$$

Zurückgelegte Strecke zur Zeit t (berechnet mit dem V-200):

$$s(t) = 8.2 + \int_0^t v(t')dt' = 8.2 + 3.8 \cdot \int_0^t e^{-t'}dt' = 8.2 + 3.8 \cdot (1 - e^{-t})$$

Insgesamt zurückgelegte Strecke für $t \rightarrow \infty$:

$$s = \lim_{t\to\infty} s(t) = 12\mathrm{m}$$

Aufgabe 9: Relativitätstheorie (1 + 2 + 1 + 1 + 2 = 7 Punkte)

a) Geschwindigkeit des Raumschiffs:

$$v = \frac{100\mathrm{L}s}{125\mathrm{s}} = \frac{100\mathrm{s} \cdot c}{125\mathrm{s}} = 0.8c$$

b)

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 1.67$$

Bezugssystem B: Raumschiff; Bezugssystem B': Erde-Raumstation

$t' = 125\mathrm{s}$; $t = t_0 = \frac{t'}{\gamma} = 75\mathrm{s}$ (Eigenzeit der Reise im System B gemessen)

c) $d' = d_0 = 100\mathrm{Ls}$ (Eigenlänge der Distanz im System B' gemessen).
Im Bezugssystem B: $d = \frac{d_0}{\gamma} = \frac{d'}{\gamma} = 60\mathrm{Ls}$

d) Aus Sicht des Raumschiffes bewegt sich die Raumstation mit 0.8c. Eine Raumstations-Uhr ist also, im Bezugssystem B gemessen, nur um $t_{RS} = \frac{t}{\gamma} = 45\mathrm{s}$ weitergelaufen.

e) Aus Sicht des Raumschiffs sind während der Reise auf der Raumstation nur 45s vergangen. Beim Vorbeiflug zeigt diese aber eine Zeit von 125s an. Der Widerspruch löst sich auf, weil im Bezugssystem B (Raumschiff) die Uhren auf der Erde und auf der Raumstation *nicht* gleichzeitig gestartet worden sind. In B hat die Raumstations-Uhr bereits eine Zeit von 125s – 45s = 80s angezeigt, als das Raumschiff an der Erde vorbeigeflogen ist.