A

Prüfung SPM Physik 2010

Lösungen

Aufgabe 1

(a) IES: $m_1 v_1 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$

$v_1' = v_1 - \frac{m_2}{m_1} v_2'$ $\qquad \underline{v_1' = 0{,}48 \frac{m}{s}}$

(b) $E_K = \frac{m_1}{2} v_1^{\,2}$ $\quad E_K = 18000 Nm$ $\qquad E_K{}' = \frac{m_1}{2} v_1{}' + \frac{m_2}{2} v_2{}'$ $\qquad E_K{}' = 10980 Nm$

$\eta = 1 - \frac{10980}{18000}$ $\qquad \underline{\eta = 0{,}39}$

Aufgabe 2

2.1. ideales Speichenrad $J_S = mr^2$ $\qquad$ Vollzylinder $J_S = \frac{1}{2} mr^2$

$\Rightarrow$ Trägheitsmoment des Speichenrades fast doppelt so gross

$E_R = \frac{1}{2} J_S \omega^2$

$\Rightarrow$ Rotationsenergie des Speichenrades fast doppelt so gross

2.2. $E_1 = E_R = \frac{1}{2} J_S \omega_1^{\,2}$ $\quad J_S = \frac{2E_1}{\omega^2}$ $\qquad \underline{J_S = 31{,}8 kgm^2}$

$M = J_S \alpha = J_S \frac{\omega_1}{t_1}$ $\qquad \underline{M = 211{,}3 Nm}$

Aufgabe 3

3.1. rücktreibende Kraft $F = -mg \sin\phi$

$ma = -mg \sin\phi$

mit $a = \ddot{b} = l\ddot{\phi}$ $\Rightarrow$ $l\ddot{\phi} = -g \sin\phi$ $\Rightarrow$ $\ddot{\phi} + \frac{g}{l} \sin\phi = 0$

für kleine Winkel ϕ gilt näherungsweise $\sin\phi = \phi$ $\Rightarrow$ $\ddot{\phi} + \frac{g}{l} \phi = 0$

3.2.

(a) Kraftgesetzes $F = -m' g = -\rho A \cdot 2x \cdot g = -2\rho g A \cdot x$,

Einsetzen in das Grundgesetz $m \ddot{x} = F$

$m \ddot{x} + 2\rho g A \cdot x = 0$ $\Rightarrow$ $\omega_0^2 = \frac{2\rho g A}{m}$

mit $m = \rho A l$ $\Rightarrow$ $\omega_0{}^2 = \frac{2g}{l}$ $\Rightarrow$ $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{2g}}$

(b) $\underline{T = 0{,}83 s}$

B

Aufgabe 4

4.1. (a) $U_R = U - U_1$ $U_R = 120V$

$R = \frac{U_R}{I}$ $\underline{R = 480\Omega}$

(b) $U_L = \sqrt{U^2 - U_1^2}$ $U_L = 202{,}0V$

$X_L = \frac{U_L}{I}$ $X_L = 808{,}0\Omega$

$X_L = 2\pi fL$ $L = \frac{X_L}{2\pi f}$ $\underline{L = 2{,}57H}$

4.2. - an der Spule wird nur Blindleistung umgesetzt, sie erwärmt sich – im Gegensatz zu einem ohmschen Widerstand – nicht
- deshalb sollte sie auch einen möglichst kleinen ohmschen Windungswiderstand besitzen

Aufgabe 5

5.1. Kreisbahnansatz $qvB = m\omega^2 r \Rightarrow \frac{q}{m} = \frac{\omega^2 r}{vB}$

mit $\omega = \frac{v}{r} \Rightarrow \frac{q}{m} = \frac{\omega}{B} \Rightarrow \omega = \frac{qB}{m}$

- die Winkelgeschwindigkeit der Teilchen ist gleich
- wegen $T = \frac{2\pi}{\omega}$ sind auch ihre Umlaufdauern und somit auch die halben Umlaufdauern gleich
- da ihre Bahnradien verschieden sind, müssen auch ihre Bahngeschwindigkeiten verschieden sein

5.2. horizontale Bewegung $x = v_1 t$

vertikale Bewegung $y = \frac{a}{2}t^2$ mit $a = \frac{F}{m} = \frac{eE}{m} = \frac{eU}{md}$

$x(t_1) = l \Rightarrow t_1 = \frac{l}{v_1}$

$y(t_1) = \frac{d}{2} \Rightarrow \frac{d}{2} = \frac{eU}{2md}\left(\frac{l}{v_1}\right)^2 \Rightarrow U = \frac{md^2 v_1^2}{el^2} \Rightarrow \underline{U = 15{,}5V}$

Aufgabe 6

C

$$z_{1,2} = \frac{-2i \pm d}{2}$$, wobei d eine Lösung der Gleichung $d^2 = -4 + 4a$ ist.

$$d^2 = -4(1-a)$$

$$d = \pm 2i \cdot \sqrt{1-a}$$

Für $a \leq 1$ hat die Gleichung die rein imaginären Lösungen $z_{1,2} = -i \pm i \cdot \sqrt{1-a}$

$$= (-1 \pm \sqrt{1-a}) \cdot i$$

Aufgabe 7

$a_0 = 2$, $a_1 = -1$, $a_2 = 1 + 12 = 13$, $a_3 = -13 - 6 = -19$

$a_4 = 97$

$$a_0 = p^0 + q^0 = 2$$

$$\left| \begin{aligned} a_1 &= p^1 + q^1 = -1 \\ a_2 &= p^2 + q^2 = 13 \end{aligned} \right| \quad \mathbb{L} = \{(-3,2) ; (2;-3)\}$$

$p = -3$ und $q = 2$ oder $p = 2$ und $q = -3$

Behauptung: $a_n = (-3)^n + 2^n$

Verankerung für $n = 0, 1, 2$ erfolgt, siehe oben

Induktionsschritt: Annahme $a_k = (-3)^k + 2^k$

$$a_{k+1} = (-3)^{k+1} + 2^{k+1}$$

Beweis: $a_{k+2} = -a_{k+1} + 6a_k$

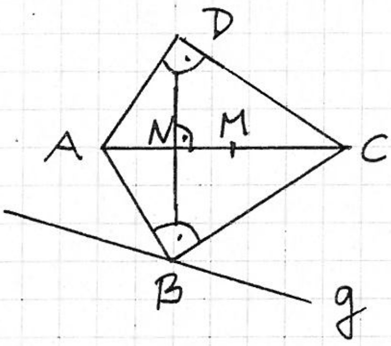
$$= -(-3)^{k+1} - 2^{k+1} + \underset{(-2)(-3)}{6}(-3)^k + \underset{2\cdot 3}{6} \cdot 2^k$$

$$a_{k+2} = (-3)^{k+1}(-1-2) + 2^{k+1}(-1+3)$$

$$= (-3)^{k+2} + 2^{k+2} \quad q.e.d.$$

Aufgabe 8

D



Inkreismittelpunkt ist der Mittelpunkt $\underline{\underline{M(2|3|1)}}$ der Strecke AC. (Thaleskreis)

Ansatz für B: $(-1+t|2+3t|11+8t)$

$$\vec{BA}\cdot\vec{BC}=0=\begin{pmatrix}t-5\\3t-5\\8t+14\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}t-1\\3t+3\\8t+6\end{pmatrix}=74t^2+148t+74$$

$\Rightarrow$ Doppellösung $t=-1$ $\Rightarrow$ $\underline{\underline{B(-2|-1|3)}}$

$$\vec{AC}=\begin{pmatrix}-4\\-8\\8\end{pmatrix},\quad \vec{BA}=\begin{pmatrix}3\\4\\-3\end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_{ABCD}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3\\4\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\3\\2\end{pmatrix}$$

$$\vec{BD}\perp\vec{n},\quad \vec{BD}\perp\vec{AC}\qquad \lambda\cdot\vec{BD}=\begin{pmatrix}-2\\3\\2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\2\\7\end{pmatrix}$$

Ansatz für $h=(BD)$: $\vec{x}=\begin{pmatrix}-2\\-1\\3\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}10\\2\\7\end{pmatrix}$

Ansatz für $d=(AC)$: $\vec{x}=\begin{pmatrix}4\\7\\-3\end{pmatrix}+v\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix}$

$h\cap d\rightarrow N \Rightarrow \underline{u=\frac{2}{9}},\quad v=\frac{34}{9}$

$$\vec{x}_D=\begin{pmatrix}-2\\-1\\3\end{pmatrix}+\frac{4}{9}\cdot\begin{pmatrix}10\\2\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2+\frac{40}{9}\\-1+\frac{8}{9}\\3+\frac{28}{9}\end{pmatrix}$$

$\underline{\underline{D\left(\frac{22}{9}\middle|-\frac{1}{9}\middle|\frac{55}{9}\right)}}$

Aufgabe 9

E

Lineare DGL 1. Ordnung $\quad y' = \frac{1}{1-x}\, y + \frac{e^x}{1-x}$

Homogene DGL $\quad \frac{y'}{y} = \frac{1}{1-x} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y}\, dy = \frac{1}{1-x}\, dx$

$$\ln|y| = -\ln|x-1| + C \quad | e^{\square}$$

$$y_h = D \cdot \frac{1}{x-1} \quad (D \in \mathbb{R})$$

Ansatz für die inhomogene Lösung : $y = k(x) \cdot \frac{1}{x-1}$

$$\Rightarrow y' = k'(x) \cdot \frac{1}{x-1} + k(x) \cdot \frac{-1}{(x-1)^2}$$

$$(1-x)\, y' = -k'(x) + k(x) \cdot \frac{1}{x-1} = \underbrace{k(x)\frac{1}{x-1}}_{y} + e^x$$

$$\Rightarrow -k'(x) = e^x$$

$$\Rightarrow k(x) = -e^x + C$$

Also $\quad \underline{\underline{y = (-e^x + C) \cdot \frac{1}{x-1}}}$

Aufgabe 10 F

Einseitiger Signifikanztest

a) $\alpha = P(H_0 \text{ wahr})$, wenn Entscheidung für H_1

X = Anzahl Korrekt-Entsorger

$n = 300$

angenähert binomialverteilt $p = 0{,}3$

$\alpha = P(X \geq 101) \approx \underline{\underline{0{,}0939}}$

(kann mit dem V200 aufsummiert werden → lange Rechenzeit!)

Berechnung mit Approximation durch die Normalverteilung

$\mu = 90$, $\sigma = \sqrt{63} > 3$ | $\alpha = 1 - P(X \leq 100)$

$z = \frac{100 - 90 + 0{,}5}{\sqrt{63}} \approx 1{,}3229$ | $= 1 - \phi(z)$

Ablesen oder numerische Integration mit dem V200 liefert $\underline{\alpha \approx 0{,}093}$

b) Entscheidungsregel: $X \leq K \Rightarrow$ Entsch. für H_0

$X > K \Rightarrow$ " für H_1

$\alpha = 1 - P(X \leq K) \leq 0{,}05$ $\quad n = 300$, $p = 0{,}3$

$1 - \Phi(z) \leq 0{,}05$

$\Phi(z) \geq 0{,}95 \Rightarrow z \approx 1{,}645$

$z = \frac{K - 90 + 0{,}5}{\sqrt{63}} \geq 1{,}645 \Rightarrow K \approx 102{,}6$

Als kritische Zahl K wird 103 gewählt.