Schwerpunktfach Physik und Anwendungen der Mathematik

Lösungen

Aufgabe 1: (6 Punkte)

a)

System (1)

- es wirkt eine konstante rücktreibende Kraft, die Gewichtsraft von K_2,
- die einsetzende Schwingung ist nicht harmonisch,
- die einzelnen Bewegungsphasen erfolgen gleichmässig beschleunigt

System (2)

- so lange die Feder gespannt ist, wirkt die lineare rücktreibende Federkraft
- diese Bewegungsphase entspricht 1/4 Periode einer harmonischen Schwingung
- ist die Feder entspannt, bewegt sich der Körper kräftefrei, also gleichförmig

b)

System (1)

$a = \frac{m_2 g}{m_1 + m_2}$ $\quad a = 1{,}64\frac{m}{s^2}$ $\quad T = 4\cdot\sqrt{\frac{2x_1}{a}}$ $\quad \underline{T = 3{,}12s}$

System (2)

$D = \frac{F_1}{s_1}$ mit $s_1 = 0{,}2m$ $\quad D = 2{,}5\frac{N}{m}$

$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{D}}$ $\quad T_1 = 3{,}14s$

$v_m = s_1\cdot\sqrt{\frac{D}{m_1}}$ $\quad v_m = 0{,}4\frac{m}{s}$

$T_2 = \frac{4x_2}{v_m}$ mit $x_2 = 0{,}3m$ $\quad T_2 = 3{,}0s$

$T = T_1 + T_2$ $\quad \underline{T = 6{,}14s}$

Aufgabe 2: (6 Punkte)

a) $\frac{E_R}{E} = \frac{\frac{1}{2}J_S\omega^2}{\frac{1}{2}J_S\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2}$ mit $J_S = \frac{2}{5}mr^2$ $\quad \frac{E_R}{E} = \frac{\frac{1}{2}\frac{2}{5}mr^2\omega^2}{\frac{1}{2}\frac{2}{5}mr^2\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2}$

mit $v = r\omega$ $\quad \frac{E_R}{E} = \frac{\frac{2}{10}}{\frac{2}{10} + \frac{5}{10}} = \frac{2}{7}$

b) $J_A\alpha = M$ mit $J_A = \frac{1}{3}ml^2$, $M = Fl$, $\varphi = \frac{\alpha}{2}t^2$

$F = \frac{2\cdot ml\cdot\varphi}{3t^2}$ mit $\varphi = \frac{1}{6}$ $\quad F = 13{,}3N$, $F_{Ges} = F + \frac{1}{2}F_G$ $\quad \underline{F = 111{,}4N}$

Aufgabe 3: (6 Punkte)

a)

$$m\omega^2 r = G\frac{mM}{r^2} \qquad \omega^2 = G\frac{M}{r^3}$$

mit $\omega = \frac{2\pi}{T}$ $\qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{1850000^3}{6{,}673\cdot 10^{-11}\cdot 7{,}35\cdot 10^{22}}}\cdot s = 7138s$

$$\underline{T = 1h59\,\min}$$

$$v = \frac{2\pi t}{T} \qquad \underline{v = 1628{,}5\frac{m}{s}}$$

b)

$$-\frac{GmM}{r_M} + E_K = -\frac{GmM}{r} + \frac{m}{2}v^2 \qquad \frac{E_K}{m} = GM\left(\frac{1}{r_M} - \frac{1}{r}\right) + \frac{v^2}{2}$$

$$\frac{E_K}{m} = 6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 7{,}35\cdot 10^{22}\cdot\left(\frac{1}{1738000} - \frac{1}{1850000}\right)\frac{J}{kg} + \frac{1628{,}5^2}{2}\frac{J}{kg} = 1{,}497\cdot 10^6\,\frac{J}{kg}$$

$$\underline{\frac{E_K}{m} = 1{,}5\frac{MJ}{kg}}$$

Aufgabe 4: (6 Punkte)

a)

$U^2 = (U_{LA} + U_S)^2 + U_L^{\ 2}$ $\qquad$ mit $U_S = R_S\cdot I$ und $U_L = X_L\cdot I$

$$X_L = \sqrt{\left(\frac{U}{I}\right)^2 - \left(\frac{U_{LA}}{I} + R_S\right)^2} \qquad X_L = 342{,}3\Omega$$

$$L = \frac{X_L}{2\pi f} \qquad \underline{L = 1{,}09H}$$

b) $\tan\varphi = \frac{X_L}{R_S + R_{LA}} = \frac{X_L}{R_S + \frac{U_{LA}}{I}}$ $\qquad \underline{\varphi = 64{,}08°}$

c) $P_W = UI\cos\varphi$ $\qquad \underline{P_W = 60W}$

Aufgabe 5: (6 Punkte)

a) $E = \frac{m}{2}v^2 \qquad v = \sqrt{\frac{2E}{m}} \qquad m = \frac{2\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}C}{3.04\cdot 10^6 C}kg = 1{,}053\cdot 10^{-25}kg$

$$v = \sqrt{\frac{2\cdot 500\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}}{1{,}053\cdot 10^{-25}}}\frac{m}{s} \qquad \underline{v = 3{,}9\cdot 10^4\,\frac{m}{s}}$$

b) $qvB = \frac{mv^2}{r} \qquad r = \frac{v}{\frac{q}{m}B} \qquad r = \frac{3{,}9\cdot 10^4}{3{,}04\cdot 10^6\cdot 0{,}01}m = 1{,}28m$

c) $\sin\alpha = \frac{l_1}{r} \quad \alpha = 9{,}0°$

$$z = l_2\tan\alpha + r(1 - \cos\alpha) \qquad \underline{z = 0{,}174m}$$

Aufgabe 6: Komplexe Funktionen (9 Punkte)

a) $\underline{\underline{ID_f = C \setminus \{-5i\}}}$, $\underline{\underline{ID_h = C \setminus \{0\}}}$, $\underline{f}$ hat <u>keine Nullstellen</u>, $\underline{h}$ hat die <u>Nullstelle</u> $\underline{\underline{z_0 = -i}}$

Fixpunkte von h: $z = 1 + \frac{i}{z} \Rightarrow z^2 - z - i = 0 \Rightarrow D = 1 + 4i \Rightarrow |D| = \sqrt{17}$, D liegt im 1.

Quadranten $\Rightarrow \varphi = \arctan(4) \cong 75.96° \Rightarrow D = \sqrt{17}e^{i\cdot 75.96°} = d^2$

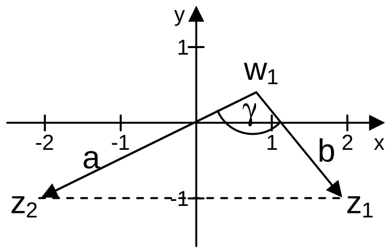
$\Rightarrow d_0 = \sqrt[4]{17}e^{i\cdot 37.98°} \cong 1.6005 + 1.2496i \Rightarrow z_{3/4} = \frac{1 \pm d_0}{2} = 0.5 \pm (0.8003 + 0.6248i)$

$\Rightarrow \underline{\underline{z_3 = 1.3003 + 0.6248i}}$, $\underline{\underline{z_4 = -0.3003 - 0.6248i}}$

b) $f(z) = h(z) \Rightarrow \frac{4i}{z+5i} = 1 + \frac{i}{z} \Rightarrow 4iz = z(z+5i) + i(z+5i) \Rightarrow 4iz = z^2 + 5iz + iz - 5$

$\Rightarrow z^2 + 2iz - 5 = 0 \Rightarrow z_{1/2} = \frac{-2i \pm \sqrt{(2i)^2 - 4\cdot(-5)}}{2} = \frac{-2i \pm \sqrt{-4+20}}{2} = \frac{-2i \pm 4}{2} = -i \pm 2$

$\Rightarrow \underline{\underline{z_1 = 2 - i}}$, $\underline{\underline{z_2 = -2 - i}}$



c) $w_1 = h(z_1) = 1 + \frac{i}{2-i} = 1 + \frac{i(2+i)}{5} = 1 + \frac{2i-1}{5} = \frac{4}{5} + \frac{2}{5}i$

$b = z_1 - w_1 = \frac{6}{5} - \frac{7}{5}i$, $a = z_2 - w_1 = -\frac{14}{5} - \frac{7}{5}i$

$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{\frac{1}{5}\cdot(6-7i)}{\frac{7}{5}\cdot(-2-i)} = \frac{1}{7}\cdot\frac{6-7i}{-2-i} = \frac{1}{7}\cdot\frac{(6-7i)(-2+i)}{5} = \frac{1}{35}(-5+20i)$

$\Rightarrow \tilde{\gamma} = arctan(-\frac{20}{5}) \cong -78.69° \Rightarrow \underline{\underline{\gamma = \cong -78.69° + 180° = 101.31°}}$

d) $g = (z_1 z_2)$: $Im(z) = -1 \Rightarrow \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) = -1 \Rightarrow z - \bar{z} + 2i = 0 \Rightarrow -iz + i\bar{z} + 2 = 0$

$h(z) = w = 1 + \frac{i}{z} \Rightarrow w - 1 = \frac{i}{z} \Rightarrow z = \frac{i}{w-1}$, $\bar{z} = -\frac{i}{\bar{w}-1}$

$h(g)$: $-iz + i\bar{z} + 2 = 0 \Rightarrow -i\frac{i}{w-1} + i\left(-\frac{i}{\bar{w}-1}\right) + 2 = 0 \Rightarrow \frac{1}{w-1} + \frac{1}{\bar{w}-1} + 2 = 0$

$\Rightarrow \bar{w} - 1 + w - 1 + 2(w-1)(\bar{w}-1) = 0 \Rightarrow 2(w\bar{w} - w - \bar{w} + 1) + w + \bar{w} - 2 = 0$

$\Rightarrow 2w\bar{w} - w - \bar{w} = 0 \Rightarrow w\bar{w} - \frac{1}{2}w - \frac{1}{2}\bar{w} = 0 \Rightarrow (w - \frac{1}{2})(\bar{w} - \frac{1}{2}) - \frac{1}{4} = 0$

$\Rightarrow |w - \frac{1}{2}|^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \underline{\underline{|w - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}}}$, <u>Kreis mit Mittelpunkt $m = \frac{1}{2}$ und Radius $r = \frac{1}{2}$</u>

Aufgabe 7: Differenzialgleichungen (9 Punkte)

a) $k=(2x-1)\cdot y \Rightarrow y=\dfrac{k}{2x-1} \Rightarrow \underline{\underline{f_k(x)=\dfrac{k}{2x-1}}}, k\in IR$ Isoklinenschar, <u>Hyperbeln</u>

b) $y'=(2x-1)\cdot y \Rightarrow \dfrac{1}{y}dy=(2x-1)dx \Rightarrow \int\dfrac{1}{y}dy=\int(2x-1)dx \Rightarrow \ln|y|=x^2-x+C, C\in IR$

$\Rightarrow |y|=e^{x^2-x}\cdot D, D\in IR^+ \Rightarrow \underline{\underline{y(x)=D\cdot e^{x^2-x}, D\in IR}}$ (da auch y=0 Lös.)

c) $\tilde{y}'(x)=(2x-1)\cdot\tilde{y}(x)-\dfrac{5}{2}e^{x^2-1}$ mit $\tilde{y}_H(x)=y(x)=D\cdot e^{x^2-x}$; Ansatz: $\tilde{y}_p(x)=D(x)\cdot e^{x^2-x}$

$\overset{\text{DGL}}{\Rightarrow}\ D'(x)\cdot e^{x^2-x}+D(x)\cdot(2x-1)\cdot e^{x^2-x}=(2x-1)\cdot D(x)\cdot e^{x^2-x}-\dfrac{5}{2}e^{x^2-1}\Rightarrow D'(x)\cdot e^{x^2-x}=-\dfrac{5}{2}e^{x^2-1}$

$\Rightarrow D'(x)=-\dfrac{5}{2}e^{x-1} \Rightarrow D(x)=-\dfrac{5}{2}e^{x-1}\ (+C, C\in IR) \Rightarrow \underline{\underline{\tilde{y}_p(x)}}=-\dfrac{5}{2}e^{x-1}\cdot e^{x^2-x}=\underline{\underline{-\dfrac{5}{2}\cdot e^{x^2-1}}}$

$\Rightarrow \underline{\underline{\tilde{y}(x)}}=\tilde{y}_H(x)+\tilde{y}_p(x)=\underline{\underline{D\cdot e^{x^2-x}-\dfrac{5}{2}\cdot e^{x^2-1}=e^{x^2}(D\cdot e^{-x}-\dfrac{5}{2e}), D\in IR}}$

d) $\underline{\underline{\tilde{m}_1=\tilde{y}_1'(1)}}=1\cdot 2-\dfrac{5}{2}e^0=\underline{\underline{-\dfrac{1}{2}}}$, $\underline{\underline{m_1=y_1'(1)}}=(2\cdot 1-1)\cdot 2=\underline{\underline{2}}$, Steigungen negativ reziprok zueinander, $\tilde{y}_1(x)$ steht also in P senkrecht auf $y_1(x)$.

Aufgabe 8: Taylor-Reihe (7 Punkte)

a) $U'(x)=\pi-\ln|\pi-x| \Rightarrow U''(x)=-\dfrac{-1}{\pi-x}=(\pi-x)^{-1},\ U'''(x)=-(\pi-x)^{-2}(-1)=(\pi-x)^{-2}$,

$U^{iv}(x)=-2(\pi-x)^{-3}(-1)=2(\pi-x)^{-3},\ U^{v}(x)=-6(\pi-x)^{-4}(-1)=6(\pi-x)^{-4},\ \ldots$

$\Rightarrow U^{(i)}(x)=(i-2)!(\pi-x)^{-i+1}, i=2,\ldots, \Rightarrow U^{(i)}(\pi+1)=(i-2)!(-1)^{-i+1}, i=2,\ldots$

$p(x)=p(\pi+1+h)=\sum_{i=0}^{\infty}\dfrac{U^{(i)}(\pi+1)}{i!}h^i=U(\pi+1)+U'(\pi+1)\cdot h+\sum_{i=2}^{\infty}\dfrac{U^{(i)}(\pi+1)}{i!}h^i$

$=0+(\pi-\ln|-1|)\cdot h+\sum_{i=2}^{\infty}\dfrac{U^{(i)}(\pi+1)}{i!}h^i=\pi h+\sum_{i=2}^{\infty}\dfrac{(i-2)!(-1)^{-i+1}}{i!}h^i=\pi h+\sum_{i=2}^{\infty}(-1)^{-i+1}\dfrac{1}{i(i-1)}h^i$

$\Rightarrow \underline{\underline{p(x)=\pi(x-(\pi+1))+\sum_{i=2}^{\infty}(-1)^{-i+1}\dfrac{1}{i(i-1)}(x-(\pi+1))^i}}$

Koeffizientenfolge: $a_i=(-1)^{-i+1}\dfrac{1}{i(i-1)}, i=2,\ldots \Rightarrow \lim_{i\to\infty}\left|\dfrac{a_{i+1}}{a_i}\right|=\lim_{i\to\infty}\dfrac{i(i-1)}{(i+1)i}=\lim_{i\to\infty}\dfrac{i-1}{i+1}=1$

$\Rightarrow$ Konv.radius R=1 $\Rightarrow$ $\underline{\underline{ID=]\pi;\pi+2[}}$

b) $x_1=\pi+1.1\in ID \Rightarrow \underline{\underline{U(\pi+1.1)}}=p(\pi+1.1)=\pi\cdot 0.1+\sum_{i=2}^{\infty}(-1)^{-i+1}\dfrac{1}{i(i-1)}0.1^i$

$\cong 0.1\cdot\pi-\dfrac{1}{2}0.1^2+\dfrac{1}{6}0.1^3-\dfrac{1}{12}0.1^4\cong 0.314159-0.005+0.0001667-0.0000083$

$\cong 0.314159-0.004833-0.0000083\cong 0.314159-0.004841=0.309318\underline{\underline{\cong 0.309(3)}}$

Aufgabe 9: Affine Abbildung (5 Punkte)

a) Mit der Verschiebung $\vec{v} = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$ kann man sich A als Zusammensetzung einer Skalierung in y-Richtung um 0.5 und einer Scherung in x-Richtung mit Faktor 1 vorstellen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{\alpha : \vec{x} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}}}$$

$$\alpha^{-1}: \vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{x}' - \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x} = \frac{1}{0.5} \begin{pmatrix} 0.5 & -0.5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\vec{x}' - \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} \right)$$

$$\Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \left(\vec{x}' - \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} \right) \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \vec{x}' - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{\alpha^{-1} : \vec{x} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}}$$

b) Fixpunkte: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -0.5 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} -0.5y = -0.5 \\ 0.5y = 0.5 \end{matrix}$ Die horizontale Gerade $\underline{\underline{y = 1}}$ ist Fixpunktgerade

Eigenwerte: $(A - \lambda E) \cdot \vec{e} = \vec{0} \Rightarrow |A - \lambda E| = 0$, falls nicht-triv. Lsgen für $\vec{e}$ existieren sollen

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0.5 \\ 0 & 0.5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\lambda)(0.5-\lambda) - 0 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0.5$$

$\lambda_1 = 1$: $(A - E) \cdot \vec{e} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0.5 \\ 0 & -0.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \begin{matrix} 0.5v = 0 \\ -0.5v = 0 \end{matrix} \Rightarrow \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ Richt. d. Fixpktger.

$\lambda_2 = 0.5$: $(A - 0.5 \cdot E) \cdot \vec{e} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \begin{matrix} 0.5u + 0.5v = 0 \\ 0u + 0v = 0 \end{matrix}$, z.B. $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Die <u>Fixgeraden</u> haben die <u>Richtung</u> $\underline{\underline{\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}}$ und gehen <u>durch jeden Punkt der Fixpunktgerade</u> $\underline{\underline{a: y = 1}}$. ($f_u : \vec{x} = \begin{pmatrix} u \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$)

[Oder: Da y=1 Fixpunktgerade ist, ist α perspektiv affin. Die Richtung der Fixgeraden ist z.B. $\overrightarrow{PP'} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (oder einfach $\vec{v} = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$).]