KANTONSSCHULE REUSSBÜHL — Maturitätsprüfung Klassen 6a-f, 6K 31.05.10
(Be, Bl, Bt, Es, Hu, Rc)

M a t h e m a t i k Grundlagenfach: Lösungen

Lösung der Aufgabe 1

1. $f(x) = \frac{1}{9}x^3 - x^2$

a) $x \longrightarrow \pm\infty \Longrightarrow f(x) \longrightarrow \pm\infty$ (Verhalten abhängig von $\frac{1}{9}x^3$)

Nullstellen: $x^2\left(\frac{1}{9}x - 1\right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = 0 \ \vee \ x_2 = 9$

Extrem- und Wendepunkte:

$f'(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x \qquad f''(x) = \frac{2}{3}x - 2 \qquad f'''(x) = \frac{2}{3}$

$f'(x) = 0\text{:} \quad \frac{1}{3}x^2 - 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x\left(\frac{1}{3}x - 2\right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_3 = 0 \ \vee \ x_4 = 6$

$f''(0) = -2 < 0 \quad \Rightarrow \quad H(0|0)$

$f''(6) = 10 > 0 \quad \Rightarrow \quad T(6|-12)$

$f''(x) = 0\text{:} \quad \frac{2}{3}x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_5 = 3$

$f'''(3) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad W(3|-6)$

b) $t\text{:}\ y = mx + c \qquad m = f'(3) = -3$

$W \in t\text{:} \quad -6 = -3 \cdot 3 + c \quad \Rightarrow \quad c = 3 \quad \Rightarrow \quad t\text{:}\ y = -3x + 3$

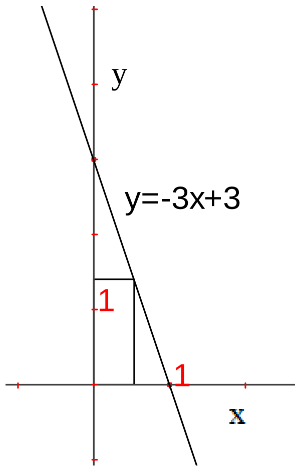
Schnittpunkt mit y-Achse: (0|3)

Schnittpunkt mit x-Achse: $-3x + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad (1|0)$

c) $A(x) = x \cdot (-3x + 3) = -3x^2 + 3x$

$A'(x) = -6x + 3, \quad A''(x) = -6$

$A'(x) = 0\text{:} \quad -6x + 3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_6 = 0.5 \quad \Longrightarrow \quad A(0.5) = 0.75$



d) $f_a(x) = ax^3 - x^2 \qquad a > 0$

$f'_a(x) = 3ax^2 - 2x \qquad f''_a(x) = 6ax - 2$

$f'_a(x) = 0\text{:} \quad 3ax^2 - 2x = 0 \quad \Rightarrow x(3ax - 2) = 0 \quad \Rightarrow x_7 = 0 \quad \vee \quad x_8 = \frac{2}{3a}$

$f''_a\left(\frac{2}{3a}\right) = 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad T\left(\frac{2}{3a}\middle| -\frac{4}{27a^2}\right)$

$f_a\left(\frac{2}{3a}\right) = a\left(\frac{2}{3a}\right)^3 - \left(\frac{2}{3a}\right)^2 = \frac{8}{27a^2} - \frac{4}{9a^2} = \frac{8-4\cdot3}{27a^2} = -\frac{4}{27a^2}$

$T\left(\frac{2}{3a}\middle| -\frac{4}{27a^2}\right) \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2}{3a} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{2}{3x}$

$y = -\frac{4}{27a^2} = -\frac{4}{27\left(\frac{2}{3x}\right)^2} = -\frac{x^2}{3} \quad \Longrightarrow$ Gleichung der Ortslinie: $y = -\frac{x^2}{3}$

Lösung der Aufgabe 2:

2. a) Verteilung

ω_i	(0/0) (0/1), (1/0) (0/3), (3/0) (0/9), (9/0)	(1/1)	(1/3), (3/1)	(1/9), (9/1) (3/3)	(3/9), (9/3)	(9/9)
x_i	-3	-2	0	6	24	78
$P(X = x_i)$	$\frac{7}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

b) $E(X) = -3 \cdot \frac{7}{16} + (-2) \cdot \frac{1}{16} + 0 \cdot \frac{2}{16} + 6 \cdot \frac{3}{16} + 24 \cdot \frac{2}{16} + 78 \cdot \frac{1}{16} = \frac{121}{16}$

c) $P(\text{"keinmal Null"}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$

d) $P(3 \cdot 3 | Fr.9) = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{3}{16}} = \frac{1}{3}$

e) A: $p = \frac{1}{8}, \quad q = \frac{7}{8}, \quad n = 10$ $\qquad P(X = 3) = \binom{10}{3} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^3 \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^7 \approx 0.0920$

$P(B) = \left(\frac{1}{8}\right)^3 \cdot \left(\frac{7}{16}\right)^7 \approx 5.9921 \cdot 10^{-6}$

f) $1 - \binom{n}{0} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^0 \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^n \geq 0.9 \quad \Rightarrow \quad 0.1 \geq \left(\frac{7}{8}\right)^n \quad |\lg$

$\Rightarrow \quad \lg(0.1) \geq n \cdot lg\left(\frac{7}{8}\right)$

$\Rightarrow \quad \frac{\lg(0.1)}{\lg\left(\frac{7}{8}\right)} \leq n \quad \Rightarrow \quad n \geq 18$

Lösung der Aufgabe 3:

a) Für den Neigungswinkel gilt $\tan(180° - \frac{\alpha}{2}) = f'(1)$

$$f'(x) = -\frac{3x-1}{2\sqrt{x}} \qquad \rightarrow \qquad f'(1) = -1$$

und damit $\frac{\alpha}{2} = 45° \quad \rightarrow \quad \alpha = 90°$.

b) Grösste Breite bei der Maximalstelle:

$$f'(x) = -\frac{3x-1}{2\sqrt{x}} = 0 \qquad \rightarrow \qquad x = \frac{1}{3}$$

Die maximale Breite b ist dann

$$b = 2 \cdot f\left(\frac{1}{3}\right) = 2 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{9} = 0.7698$$

c) Fläche zwischen k und k':

$$f(x) = \sqrt{x} - x\sqrt{x} \quad \rightarrow \quad F(x) = \int f(x)\, \mathrm{d}x = \frac{2x\sqrt{x}(5-3x)}{15}$$

Für die Fläche gilt dann:

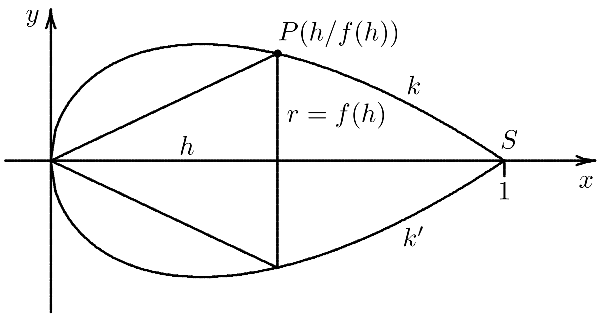
$$A = 2\int_0^1 f(x)\, \mathrm{d}x = 2\left[\frac{2x\sqrt{x}(5-3x)}{15}\right]_0^1 = 2\left(\frac{2 \cdot 2}{15} - 0\right) = \frac{8}{15}$$

d) Rotationsvolumen mit Grenzen 0 und 1:

$$V = \pi \cdot \int_0^1 [(1-x) \cdot \sqrt{x}]^2\, dx = \pi \cdot \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \pi \cdot \frac{1}{12} = \frac{\pi}{12} = 0.2618$$

e) Für das Volumen des Kegels gilt:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$



Für den Radius erhalten wir gemäss Skizze $r = f(h)$ als Nebenbedingung:

$$V(h) = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi f(h)^2 h = \frac{1}{3}\pi[(1-h) \cdot \sqrt{h}]^2 h$$

Damit dieses Volumen ein Maximum annimmt, muss $V'(h) = 0$:

$$V'(h) = \pi \cdot \left(\frac{4h^3}{3} - 2h^2 + \frac{2h}{3}\right) \qquad \rightarrow \qquad h_1 = 0; \quad h_2 = \frac{1}{2}; \quad h_3 = 1$$

Nur $h = \frac{1}{2}$ kann eine Lösung für das Maximum sein, da bei $h = 0$ das Volumen null ist, da es keine Höhe hat. Bei $h = 1$ ist $r = 0$, also das Volumen auch 0.

Lösung der Aufgabe 4

a) Der grösste Winkel liegt gegenüber der grössten Seite:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}; \qquad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix};$$

mit $\overline{AB} = \sqrt{6^2 + (-4)^2 + 1^2} = \sqrt{53}$; $\quad \overline{AC} = \sqrt{3^2 + (-5)^2 + (-4)^2} = \sqrt{50}$
$\overline{BC} = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2 + (-5)^2} = \sqrt{35}$.

Damit ist der $\gamma = \sphericalangle(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$ der grösste Winkel:

$$\cos\gamma = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{\overline{CA} \cdot \overline{CB}} = \frac{-9+5+20}{\sqrt{50} \cdot \sqrt{35}} = 0.3824 \quad \rightarrow \quad \gamma = 67.513^\circ$$

Für den Flächeninhalt der Grundfläche gilt:

$$G = \frac{1}{2} \cdot \left| \left|\overrightarrow{CA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{CB}\right| \cdot \sin\gamma \right| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{50} \cdot \sqrt{35} \cdot \sin 67.513^\circ = 19.33$$

b) Eine Parametergleichung für die Ebene durch A, B und C lautet:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overrightarrow{OA} + u \cdot \overrightarrow{AB} + v \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Dies ergibt dann das Komponentengleichungssystem: $\left| \begin{array}{l} x = -2 + 6u + 3v \\ y = 3 - 4u - 5v \\ z = 1 + u - 4v \end{array} \right|$

$$\begin{array}{r} \mathrm{I}: \\ \mathrm{II}: \\ \mathrm{III}: \end{array} \left| \begin{array}{l} x = -2 + 6u + 3v \\ y = 3 - 4u - 5v \\ z = 1 + u - 4v \end{array} \right| \xrightarrow[\mathrm{I}-6\cdot\mathrm{III}]{2\cdot\mathrm{I}+3\cdot\mathrm{II}} \begin{array}{r} \mathrm{IV}: \\ \mathrm{V}: \end{array} \left| \begin{array}{l} 2x + 3y = 5 - 9v \\ x - 6z = -8 + 27v \end{array} \right|$$

$\xrightarrow{3\cdot\mathrm{IV}+\mathrm{V}} 3(2x+3y) + x - 6z = 15 - 8$

$\rightarrow 7x + 9y - 6z - 7 = 0 \quad$ oder $\quad -7x - 9y + 6z + 7 = 0$

c) Für den Schwerpunkt gilt:

$$\overrightarrow{OS} = \frac{1}{3} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -2+4+1 \\ 3-1-2 \\ 1+2-3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad S(1/0/0)$$

Damit erhalten wir für die Parametergleichung der Normalen zu ABC durch S:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Eingesetzt in die Ebenengleichung von ε:

$$3(1+7t) - 2 \cdot 9t - 6t - 6 = 0 \qquad \rightarrow \qquad t = -1$$

Den Parameterwert in die Geradengleichung eingesetzt, ergibt die Komponenten von $\overrightarrow{OD}$:

$$\overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -9 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow D(-6/-9/6)$

d) Die Höhe h folgt aus Länge von $\overrightarrow{SD} = \begin{pmatrix} -7 \\ -9 \\ 6 \end{pmatrix}$:

$$h = |SD| = \sqrt{(-7)^2 + (-9)^2 + 6^2} = \sqrt{166} = 12.884$$

Mit der Grundfläche aus a):

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = 83$$

Das Volumen beträgt 83 VE.

e) $A' = A$. D spiegeln:

$$\overrightarrow{OD'} = \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{DS} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix}$$

(oder $\overrightarrow{OD'} = \overrightarrow{OD} + 2 \cdot \overrightarrow{DS}$)

Für die gespiegelte Gerade ist dann A Stützpunkt und $\overrightarrow{AD'}$ der Richtungsvektor

$$g' : \overrightarrow{r} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AD'} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Lösung der Aufgabe 5a

Einzelwahrscheinlichkeit von A ist $\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$, diejenige von B ist $\frac{1}{6}$.

P(A gewinnt Spiel) = P(A trifft im 1. Wurf) + P(A trifft genau in seinem 2.Wurf) + P(A trifft genau in seinem 3.Wurf) + …. =

$= \frac{1}{9}+\frac{8}{9}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{9}+\frac{8}{9}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{9}+...$

Unendliche geometrische Reihe mit $a_1 = \frac{1}{9}$ und $q = \frac{20}{27}$

Daher gilt: <u>P(A gewinnt Spiel)</u> = $\dfrac{\frac{1}{9}}{1-\frac{20}{27}}=\underline{\underline{\frac{3}{7}}}$

Lösung der Aufgabe 5b

Mittelpunkt M(0|0) und Radius R= 2 von k.

Die Normale n zur Geraden t durch M hat daher die Gleichung n: $y = \sqrt{3}\,x$

Schnitt von n mit k: $x^2 + 3x^2 = 4$, also B_1: $x_1 = 1$, $y_1 = \sqrt{3}$ und B_2: $x_2 = -1$, $y_2 = -\sqrt{3}$

$B_1 \in t$: $\sqrt{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}} + q_1$, damit $q_1 = \underline{\underline{\frac{4}{\sqrt{3}}}}$

Analog für B_2 (bzw. aus Symmetriegründen) $q_2 = \underline{\underline{-\frac{4}{\sqrt{3}}}}$

Lösung der Aufgabe 5c

Partielle Integration von $\int x\ln(x)dx$: $u' = x$, $v = \ln x \rightarrow u = \frac{x^2}{2}$, $v' = \frac{1}{x}$

Also ist $\int x\ln(x)dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C$

Damit ist $\int_1^e x\ln(x)dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}\right]_1^e = \underline{\underline{\frac{e^2+1}{4}}}$