1. a) Parabel $\Rightarrow$ horziontale Tangente geht durch den Scheitelpunkt S. Die x-Koordinate des Scheitelpunktes liegt in der Mitte zwischen den Nullstellen

$$f_1(x) = 2x - x^2 = x(2-x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = 0 \quad \text{oder} \quad x_1 = 2$$

$\rightarrow x_s = 1 \quad \Rightarrow \quad S(1/1)$

$\rightarrow y = 1$

(oder mit $f'(x) = 0$;...)

b) Gleiche Steigung wie $y = -x \quad \Rightarrow$ Ansatz: $h(x) = -x + b$

Es gilt: $f_1'(x) = -1 \quad \Rightarrow \quad 2-2x = -1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad B\left(\frac{3}{2}/f(\frac{3}{2})\right) = B(\frac{3}{2}/\frac{3}{4})$

$f_1(x) = h(x) \quad \Rightarrow \quad 2x - x^2 = -x + b \quad \xrightarrow{x=\frac{3}{2}} \quad b = \frac{9}{4}$

Geradengleichung:

$$y = -x + \frac{9}{4}$$

c) $f_a(x) = 0$

$$f_a(x) = \frac{2-a}{a} \cdot (2ax - x^2) = \frac{2-a}{a} \cdot x(2a - x) \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad \text{oder} \quad x_2 = 2a$$

d) Für die Ableitung gilt

$$f_a'(x) = \frac{2-a}{a} \cdot (2a - 2x)$$

Für die Steigungen in den Nullstellen (aus c)) gilt dann

$$f_a'(x_0) = \frac{2-a}{a} \cdot 2a = 2(2-a)$$

und

$$f_a'(x_1) = \frac{2-a}{a} \cdot (2a - 4a) = -2(2-a)$$

Damit die Geraden senkrecht aufeinanderstehen, muss gelten:

$$f_a'(x_0) = -\frac{1}{f_a'(x_1)} \quad \Rightarrow \quad 2(2-a) = \frac{1}{2(2-a)} \quad \Rightarrow \quad (2-a)^2 = \frac{1}{4}$$

$\rightarrow a_1 = \frac{5}{2}$; $a_2 = \frac{3}{2}$. Wegen $0 < a < 2$ ist nur $a_2 = \frac{3}{2}$ eine Lösung.

e) Integral mit Nullstellen aus c) als Grenzen. Wegen $\frac{2-a}{a} > 0$ ist die Parabel nach unten geöffnet und somit liegt die gesuchte Fläche oberhalb der x-Achse. Mit $0 < 2a$ erhalten wir für die Fläche das Integral:

$$F(a) = \frac{2-a}{a} \int_0^{2a} (2ax - x^2)\, \mathrm{d}x = \frac{2-a}{a} \left[2a\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^{2a} = \frac{2-a}{a} \cdot \frac{4a^3}{3} = \frac{8a^2}{3} - \frac{4a^3}{3}$$

Fläche extremal:

$$F'(a) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{16}{3}a - 4a^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 = 0; \quad a_2 = \frac{4}{3}$$

Wegen $a > 0$ ist nur $a_2 = \frac{4}{3}$ eine Lösung.

Maximum:

$$F''(a) = \frac{16}{3} - 8a \quad \Rightarrow \quad F''\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{16}{3} - 8 \cdot \frac{4}{3} = -\frac{16}{3} < 0 \quad ✔$$

2. a) Es gilt

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 12 \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2 + 12^2} = 9\sqrt{2}$$

und

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-8)^2 + 4^2 + 8^2} = 12$$

Für den Winkel gilt dann:

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{24 - 12 + 96}{12 \cdot 9\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = 45^\circ$$

b) Der Punkt $H(3/8/-2)$ liegt auf der Gerade (AB):

$$\overrightarrow{OH} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Und:

$$\overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} = -24 - 24 + 48 = 0 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{HC} \perp \overrightarrow{AB}$$

c) Parametergleichung:

$$\overrightarrow{r_P} = \overrightarrow{OA} + \frac{u}{4} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{v}{3} \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Dies führt auf das Gleichungssystem

$$\begin{array}{r|rcrcrcr|} \mathrm{I} & x & = & 9 & - & 2u & - & v \\ \mathrm{II} & y & = & 5 & + & u & - & v \\ \mathrm{III} & z & = & -8 & + & 2u & + & 4v \end{array} \xrightarrow[\mathrm{I+III}]{\mathrm{I+2II}} \begin{array}{r|rcrcrcr|} \mathrm{IV} & x & + & 2y & = & 19 & - & 3v \\ \mathrm{V} & x & + & z & = & 1 & + & 3v \end{array} \xrightarrow{\mathrm{IV+V}} 2x + 2y + z = 20$$

Und damit

$$2x + 2y + z - 20 = 0$$

d) Die Normale zur Ebene E durch den Punkt T

$$\overrightarrow{r_P} = \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

in die Koordinatengleichung von d) eingesetzt:

$$2(8 + 2t) + 2(11 + 2t) + t - 20 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = -2$$

Und für den gespiegelten Punkt T' mit $t = -4$ (für $t = -2$: $S(4/7/-2)$)

$$\overrightarrow{OT'} = \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad T'(0/3/-4)$$

e) Aus a) $|AB| = 12$. Idee: Bringe den Vektor $\overrightarrow{HC}(\perp \overrightarrow{AB})$ auf Länge 12:

$$\left| r\overrightarrow{HC} \right|^2 = 144 \quad \Rightarrow \quad (3r)^2 + (-6r)^2 + (6r)^2 = 144 \quad \Rightarrow \quad r_{1,2} = \pm\frac{4}{3}$$

Für die Koordinaten von P ergibt sich dann mit $r_1 = \frac{4}{3}$

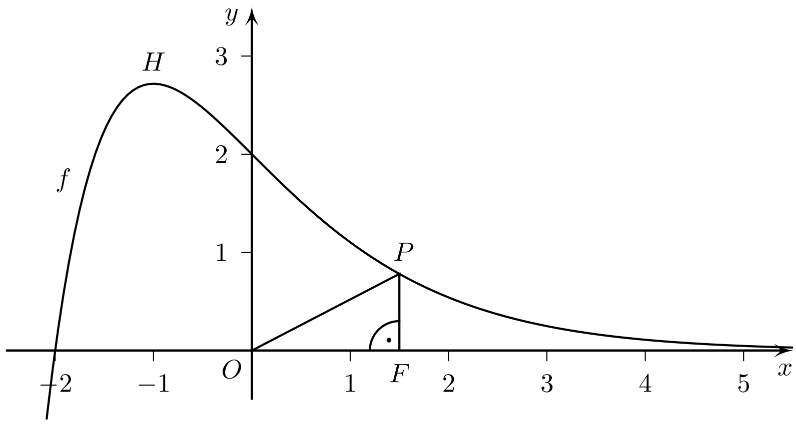
$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB} + \frac{4}{3} \cdot \overrightarrow{HC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad P(5/1/8)$$

und für Q

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} + \frac{4}{3} \cdot \overrightarrow{HC} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad Q(13/-3/0)$$

Zweite Lösung: $P'(-3/17/-8)$, $\quad Q'(5/13/-16)$

3. *Skizze:*



a) Nullstelle:

$$f(x) = \frac{x+2}{e^x} = 0 \quad \Rightarrow \quad x + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -2$$

Extremum (Ableitung mit Quotientenregel):

$$f'(x) = \frac{1 \cdot e^x - (x+2)e^x}{(e^x)^2} = \frac{e^x(1-x-2)}{(e^x)^2} = \frac{-x-1}{e^x} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1$$

$\rightarrow H(-1/f(-1)) = H(-1/e)$

b) Zielfunktion ($A = \frac{1}{2}\overline{OF} \cdot \overline{FP}$ in Skizze):

$$A(x) = \frac{1}{2}xf(x) = \frac{1}{2}x \cdot \frac{x+2}{e^x} = \frac{x^2+2x}{2e^x} \qquad \text{mit} \qquad \mathbb{D} = [\,0\,;\infty)$$

Extremum:

$$A'(x) = \frac{(2x+2)\cdot 2\mathrm{e}^x - (x^2+2x)\cdot 2\mathrm{e}^x}{(2\mathrm{e}^x)^2} = \frac{-x^2+2}{2\mathrm{e}^x} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$$

Wegen $x \geq 0$ braucht man nur die positive Lösung zu berücksichtigen.

Ränder:

$$A(0) = 0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to\infty} A(x) = 0$$

Darum ist

$$A(\sqrt{2}) = \frac{2+2\sqrt{2}}{2\mathrm{e}^{\sqrt{2}}} = \frac{1+1\sqrt{2}}{\mathrm{e}^{\sqrt{2}}} \approx 0.5869$$

ein lokales Maximum.

Oder mit der 2. Ableitung:

$$A''(x) = \frac{x^2-2x-2}{2\mathrm{e}^x} \quad \Rightarrow \quad A''(\sqrt{2}) = \frac{2-2\sqrt{2}-2}{2\mathrm{e}^{\sqrt{2}}} = \frac{-2\sqrt{2}}{2\mathrm{e}^{\sqrt{2}}} < 0 \quad ✔$$

c) $F(x)$ ableiten:

$$F'(x) = \frac{a\mathrm{e}^x - (ax+b)\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x)^2} = \frac{-ax+a-b}{\mathrm{e}^x}$$

Wegen $F'(x) = f(x)$, Koeffizientenvergleich in den Zählern:

$$\frac{-ax+a-b}{\mathrm{e}^x} = \frac{x+2}{\mathrm{e}^x} \quad \Rightarrow \quad -a = 1; \quad a-b = 2 \quad \Rightarrow \quad a = -1; \quad b = -3$$

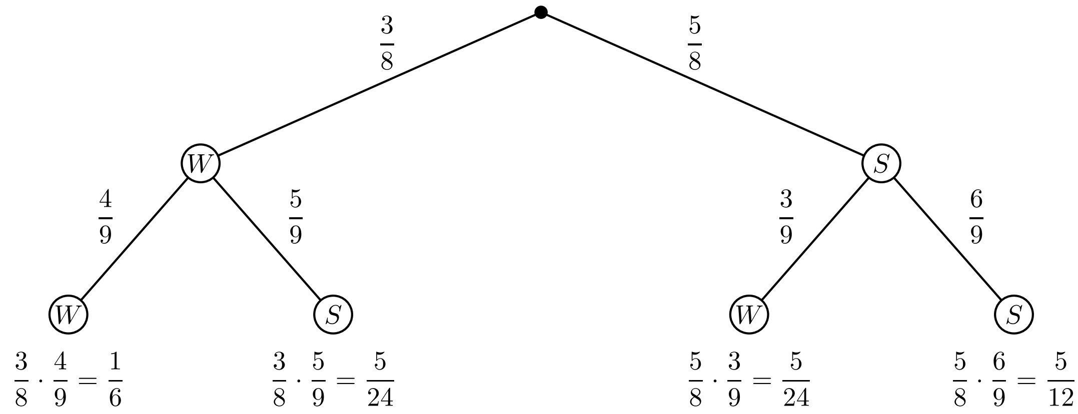
Und damit die gesuchte Stammfunktion:

$$F(x) = \frac{-x-3}{\mathrm{e}^x}$$

d) Für die gesuchte Fläche gilt

$$\begin{aligned} A = \int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{z\to\infty} [F(z)]_0^z &= \lim_{z\to\infty} \left[\frac{-x-3}{\mathrm{e}^x}\right]_0^z \\ &= \lim_{z\to\infty} \left[\frac{-z-3}{\mathrm{e}^z} - \frac{-0-3}{\mathrm{e}^0}\right] = \lim_{z\to\infty} \left[\frac{-z-3}{\mathrm{e}^z} + 3\right] \\ &= 3 \end{aligned}$$

4. Baumdiagramm



a) $P(WW) = \frac{1}{6}$

b) $P(W,S) = P(WS) + P(SW) = \frac{5}{24} + \frac{5}{24} = \frac{5}{12}$

c) $P(SS) = \frac{5}{12}$

Wahrscheinlichkeitsverteilung

w_i	0	1	2
$P(W = w_i)$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{6}$

Erwartungswert:

$$E(W) = 0 \cdot \frac{5}{12} + 1 \cdot \frac{5}{12} + 2 \cdot \frac{1}{6} = 0.75$$

5. a) Binomialverteilung mit $n = 60$ und $p = 0.03$

$$\begin{aligned} P_{60}(x \le 2) &= \binom{60}{0} 0.03^0 \cdot 0.97^{60} + \binom{60}{1} 0.03^1 \cdot 0.97^{59} + \binom{60}{2} 0.03^2 \cdot 0.97^{58} \\ &= 0.1608 + 0.2984 + 0.2723 \\ &= 0.7315 \end{aligned}$$

b) n: Personen. Gegenwahrscheinlichkeit 0.97^n, dass keine der ersten n Personen das Symptom hat.

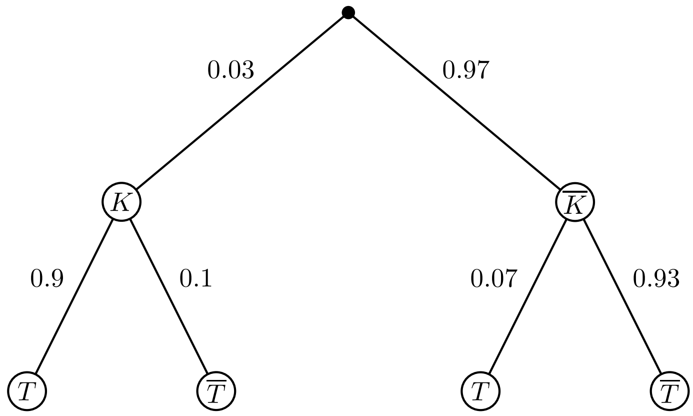
$$1 - 0.97^n > 0.99 \quad \Rightarrow \quad 0.97^n \le 0.01$$

und da 0.97^n monoton fallend

$$n \ge \frac{\ln 0.01}{\ln 0.97} = 151.19$$

Es braucht also mindestens 152 Personen für das gesuchte Kriterium.

c) Baumdiagramm (T: Test zeigt an, $\overline{T}$: Test zeigt nicht an)



Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit gilt dann:

$$P(K \mid T) = \frac{P(K \cap T)}{P(K \cap T) + P(\overline{K} \cap T)} = \frac{0.03 \cdot 0.9}{0.03 \cdot 0.9 + 0.97 \cdot 0.07} = 0.2845$$

6. a) $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 20 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x-4)^2 + (y-3)^2 = 5$

Gerade durch P und $M(4/3)$:

$$a = \frac{15-3}{-2-4} = -2 \quad \Rightarrow \quad y = -2x + b \quad \Rightarrow \quad y = -2x + 11$$

Dies in die Kreisgleichung einsetzen:

$$x^2 + (-2x+11)^2 - 8x - 6(-2x+11) + 20 = 0 \quad \Rightarrow \quad 5x^2 - 40x + 75 = 0$$

Die letzte Gleichungen kann man noch durch 5 dividieren:

$$x^2 - 8x + 15 = (x-3)(x-5) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 5 \quad \text{und} \quad x_2 = 3$$

Eingesetzt in die Geradengleichung erhalten wir die Schnittpunkte:

$$P_1(5/1) \qquad \text{und} \qquad P_2(3/5)$$

Da der Punkt P links oberhalb des Kreismittelpunktes liegt, müssen wir auch den linken oberen Schnittpunkt als Lösung für den kürzesten Abstand wählen:

$$P_2(3/5)$$

b) Partielle Integration:

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi x \sin x \,\mathrm{d}x &= [-x\cos x]_0^\pi - \int_0^\pi -\cos x \,\mathrm{d}x \\
&= [-x\cos x]_0^\pi + \int_0^\pi \cos x \,\mathrm{d}x \\
&= [-x\cos x + \sin x]_0^\pi \\
&= [-\pi \cdot (-1) + 0 - (-0 \cdot 1 + 0)] \\
&= \pi
\end{aligned}$$

c) Setzt man die Reihe der Quadrate nach links fort, so hat das Quadrat Q_0 die Seitenlänge $\overline{AB} = \frac{5}{4}$. Somit ist das Seitenverhältnis $s_1 : s_0 = 4 : 5$ und damit das Flächenverhältnis $q = \frac{16}{25}$. Für die Summe der Quadratflächen erhalten wir dann:

$$s = F_{Q_1} \frac{1}{1-q} = 1 \cdot \frac{1}{1-\frac{16}{25}} = \frac{25}{9}$$