

Kantonsschule Reussbühl

Fach	Grundlagenfach Mathematik
Prüfende Lehrpersonen	Nils Andersen Irina Bayer Bernhard Berchtold Peter Büchel Jörg Donth Yves Gärtner Roland Reichmuth
Klassen	6a/6b/6c/6d/6e/6f/6K
Prüfungsdatum	30. Mai 2012
Prüfungsdauer	3 Stunden
Erlaubte Hilfsmittel	Fundamentum Mathematik und Physik Taschenrechner TI 83+ bzw. TI voyage200
Anweisungen zur Lösung der Prüfung	Bei jeder Aufgabe muss ein formaler Lösungsweg angegeben werden.
Anzahl erreichbarer Punkte	Aufgabe 1 : 10 Aufgabe 2 : 10 Aufgabe 3 : 10 Aufgabe 4 : 10 Aufgabe 5 : 10 <hr/> Total : 50 Für 40 Punkte wird die Note 6 erteilt (Notenskala linear)
Anzahl Seiten (inkl. Titelblatt)	4

1 Differential- und Integralrechnung I**[10]**

Gegeben ist die Funktionenschar

$$f_a(x) = \frac{x^3 - ax^2 + 1}{2x^2} = \frac{x}{2} - \frac{a}{2} + \frac{1}{2x^2}$$

mit Scharparameter $a \in \mathbb{R}$.

- a) Zeigen Sie, dass f_a genau einen Extremwert besitzt und dass die Stelle x_E dieses Extremwertes von a unabhängig ist. Bestimmen Sie die Art des Extremwertes. [2]

Für das Weitere sei $a = 2$.

- b) Diskutieren Sie die Funktion f_2 (Nullstellen, Extremal- und Wendepunkte, Asymptoten) und zeichnen Sie ihren Graphen. [5]
- c) Die Tangente t_1 berührt den Graphen von f_2 bei $x = -1$. Eine weitere Tangente t_2 soll t_1 senkrecht schneiden. In welchem Punkt berührt t_2 den Graphen von f_2 ? [3]
-

2 Wahrscheinlichkeitsrechnung**[10]**

Ein Vertreter besucht in einer Stadt verschiedene Kunden. Erfahrungsgemäss sind trotz Vorankündigung 7% der Kunden nicht zu Hause.

Bei den Teilaufgaben a) bis d) besucht der Vertreter jeweils genau 8 Kunden.

- a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse: [3]
- Der Vertreter trifft alle 8 Kunden zu Hause an.
 - Genau 3 der 8 Kunden sind nicht anwesend.
 - Höchstens 6 der 8 Kunden sind anwesend.
- b) Man weiss, dass er nicht alle 8 Kunden angetroffen hat (und somit nochmals in die Stadt fahren muss). Mit welcher Wahrscheinlichkeit waren genau 2 der 8 Kunden nicht zu Hause? [2]
- c) Die Zufallsvariable X bezeichnet die Anzahl Kunden, die der Vertreter bei acht Besuchen zu Hause antrifft. Berechnen Sie den Erwartungswert von X . [2]
- d) Der Vertreter besucht die 8 Kunden in beliebiger Reihenfolge. Wie viele mögliche Reihenfolgen gibt es? Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Vertreter (zufällig) die Kunden, die alle verschiedene Namen haben, in alphabetischer Reihenfolge besucht? [1]

Bei der Teilaufgabe e) ist offen, wie viele Kunden er besucht:

- e) Wie viele Kunden müsste der Vertreter mindestens besuchen, damit die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Kunde nicht anwesend ist, grösser als 75% wird? [2]

3 Differential- und Integralrechnung II**[10]**

Gegeben ist die Funktionenschar mit der Gleichung

$$f_k(x) = \frac{1}{9}(kx - 6)^2 \quad \text{für } k > 0$$

- Zeichnen Sie für die beiden Werte $k = 1$ und $k = 2$ die zugehörigen Funktionsgraphen und berechnen Sie den Schnittwinkel der Graphen im Schnittpunkt mit $x > 0$. [2]
 - Berechnen Sie dann für diese k -Werte die Fläche, die von den beiden Funktionsgraphen eingeschlossen wird. [2]
 - Sei nun k allgemein. Die Fläche F wird durch die Koordinatenachsen, dem Graphen von f_k und der Geraden mit der Gleichung $x = 6$ begrenzt. Bestimmen Sie k so, dass die Fläche F extremal wird. Weisen Sie nach, ob es sich um ein Maximum oder ein Minimum handelt. [3]
 - Die Tangente im Schnittpunkt des Graphen von f_k mit der y -Achse zerlegt die Fläche G , die von den Koordinatenachsen und dem Funktionsgraphen von f_k begrenzt wird, in zwei Teile. Berechnen Sie das Verhältnis der beiden Flächenteile. [3]
-

4 Vektorgeometrie**[10]**

Gegeben sind die drei Punkte $A(-5/1/1)$, $B(5/1/-4)$ und $C(7/6/0)$ sowie die Gerade

$$g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- Wie lang ist die Strecke AB ? [1]
 - Bestimmen Sie den Punkt D so auf der Geraden g , dass das Dreieck ABD rechtwinklig ist mit rechtem Winkel bei B . [3]
 - Wie lautet die Koordinatengleichung der Ebene $E = (ABC)$? [2]
 - Berechnen Sie die Koordinaten eines Punktes S , wenn die Strecke BS senkrecht auf der Ebene E stehen und Länge 9 haben soll. [2]
 - Wie gross ist der Winkel γ zwischen der Strecke AS und der Ebene E ? [2]
-

5 Drei unabhängige Aufgaben**[10]**

a) Der Kreis

[4]

$$k : x^2 + y^2 + 6y - 16 = 0$$

schneidet die x -Achse im Punkt $P(x_P > 0/0)$ und die y -Achse im Punkt $Q(0/y_Q > 0)$. Die Tangente t an k in P schneidet die y -Achse im Punkt T . Berechnen Sie die Koordinaten des Mittelpunktes M von k und der Punkte P und Q . Machen Sie dann eine saubere Zeichnung der Situation in einem Koordinatensystem (1 E=2 H auf beiden Achsen).

b) Eine Mannschaft besteht aus einem Torhüter, zwei Verteidigern und drei Stürmern. Ein Trainer hat drei Torhüter, sechs Verteidiger und zwölf Stürmer zur Verfügung. Einer der Stürmer heisst Paul. **[3]**

- i. Wie viele Möglichkeiten hat der Trainer, die Mannschaft aufzustellen?
- ii. Wie viele mögliche Mannschaftsaufstellungen gibt es, wenn Paul dabei ist?
- iii. Wie viele gibt es, wenn Paul nicht dabei ist?

c) Für welchen Wert des Parameters $a \in \mathbb{R}$ hat die Gleichung

[3]

$$e^{2x} - a e^x + 4 = 0$$

genau eine Lösung. Wie lautet dann die Lösung der Gleichung? (e ist die Eulersche Zahl).