1. a) Für die Funktion gilt

$$f_a(x) = \frac{x^3 - ax^2 + 1}{2x^2} = \frac{1}{2}x - \frac{a}{2} + \frac{1}{2}x^{-2}; \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

und damit für die Ableitung (mit Quotientenregel)

$$f_a'(x) = \frac{(3x^2 - 2ax) \cdot 2x^2 - (x^3 - ax^2 + 1) \cdot 4x}{4x^4} = \frac{2x^4 - 4x}{4x^4}$$

oder (einfacher)

$$f_a'(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(-2)x^{-3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^3}$$

f_a' ist unabhängig von a.

2. Ableitung

$$f_a''(x) = \frac{(8x^3 - 4) \cdot 4x^4 - (2x^4 - 4x) \cdot 16x^3}{16x^8} = \frac{48x^4}{16x^8} = \frac{3}{x^4}$$

oder

$$f_a''(x) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x^3}\right)' = \left(\frac{1}{2} - x^{-3}\right)' = 3x^{-4} = \frac{3}{x^4}$$

Es folgt für das Extremum:

$$f_a'(x) = \frac{2x^4 - 4x}{4x^4} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x^4 - 4x = x(2x^3 - 4) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_E = \sqrt[3]{2} \approx 1.26$$

(da $x \notin \mathbb{D}$ muss nur der Klammerausdruck betrachtet werden).

oder

$$f_a'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^3} = 0 \quad \xrightarrow{\cdot x^3} \quad x^3 = 2 \quad \Rightarrow \quad x_E = \sqrt[3]{2} \approx 1.26$$

$x_E = \sqrt[3]{2}$ ist die einzige Lösung und von a unabhängig.

x_E in die 2. Ableitung eingesetzt

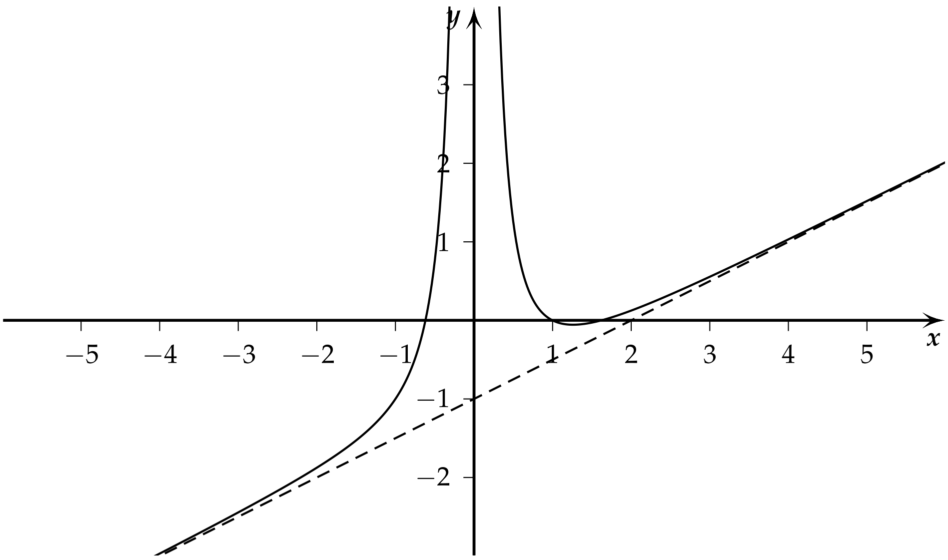
$$f_a''(x_E) = \frac{3}{2^{\frac{4}{3}}} = 1.19 > 0$$

Das heisst, wir haben bei $x_E = \sqrt[3]{2}$ ein lokales Minimum!

b) Für $a = 2$ gilt

$$f_2(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 1}{2x^2} = \frac{1}{2}x - 1 + \frac{1}{2x^2}; \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

Skizze:



Nullstellen:

$$f_2(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 1}{2x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^3 - 2x^2 + 1 = 0$$

oder

$$\frac{1}{2}x - 1 + \frac{1}{2x^2} = 0 \quad \xrightarrow{\cdot 2x^2} \quad x^3 - 2x^2 + 1 = 0$$

$x = 1$ ist Nullstelle, da

$$1^3 - 2 \cdot 1^2 + 1 = 0 \quad ✔$$

Diese Nullstelle wird mittels Polynomdivision abgespalten:

$$\begin{array}{l}
(x^3 - 2x^2 \qquad + 1) : (x - 1) = x^2 - x - 1 \\
\underline{x^3 - \ x^2} \\
\quad - x^2 \qquad + 1 \\
\quad \underline{- x^2 + x} \\
\qquad\quad - x + 1 \\
\qquad\quad \underline{- x + 1} \\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

Die rechte Seite null gesetzt, ergibt die Lösungen

$$x_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-1)}}{-2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Und damit

$$N_1(1/0); \quad N_2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big/0\right) \approx N_2(1.618/0); \quad N_3\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big/0\right) \approx N_3(-0.618/0)$$

Extremalstellen:

Ableitungen (können an sich aus a) übernommen werden):

$$\begin{aligned} f_2'(x) &= \frac{(3x^2-4x)\cdot 2x^2 - (x^3-2x^2+1)\cdot 4x}{4x^4} = \frac{2x^4-4x}{4x^4} \\ f_2''(x) &= \frac{(8x^3-4)\cdot 4x^4 - (2x^4-4x)\cdot 16x^3}{16x^8} = \frac{48x^4}{16x^8} = \frac{3}{x^4} \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} f_2'(x) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{x^3} \\ f_2''(x) &= \frac{3}{x^4} \end{aligned}$$

Es folgt für das Extremum: (kann aus a) übernommen werden)

$$x_4 = \sqrt[3]{2} \approx 1.26$$

Damit haben wir ein lokales Minimum mit dem Tiefpunkt:

$$T\left(\sqrt[3]{2}\Big/f_2\left(\sqrt[3]{2}\right)\right) \approx T(1.26/-0.055)$$

Wendestellen

Wendestellen gibt es keine, da $f_2''(x) \neq 0 \; \forall x \in \mathbb{D}$.

Asymptoten:

$x_5 = 0$ ist eine Polstelle (keine Nullstelle des Zählers), d.h $x = 0$ vertikale Asymptote.

Bei Annäherung von 0 von beiden Seiten streben die Funktionswerte gegen ∞ und damit haben wir keinen Vorzeichenwechsel.

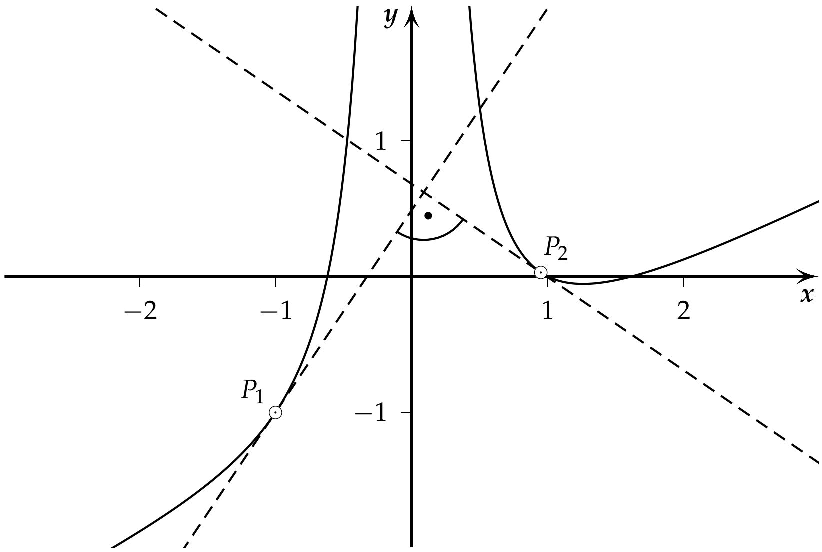
Für $x \to \pm\infty$ gilt

$$\lim_{x\to\pm\infty} f_2(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{2}x - 1 + \frac{1}{2x^2}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}x - 1$$

Wir haben eine schiefe Asymptote

$$g : y = \frac{1}{2}x - 1$$

c) Skizze



Es folgt

$$f_2'(x) = \frac{2x^4 - 4x}{4x^4} \quad \Rightarrow \quad f_2'(-1) = \frac{2+4}{4} = \frac{3}{2}$$

oder

$$f_2'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^3} \quad \Rightarrow \quad f_2'(-1) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

und damit

$$m_{t_1} \cdot m_{t_2} = -1 \quad \Rightarrow \quad m_{t_2} = -\frac{2}{3}$$

Bestimmung der Berührungsstelle

$$\begin{aligned} f_2'(x) &= -\frac{2}{3} \\ \frac{2x^4 - 4x}{4x^4} &= -\frac{2}{3} \\ 6x^4 - 12x &= -8x^4 \end{aligned}$$

$$x(14x^3 - 12) = 0$$

und damit

$$14x^3 - 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt[3]{\frac{6}{7}} \approx 0.95$$

oder

$$f_2'(x) = -\frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{x^3} = -\frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x^3} = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{7}{6} \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt[3]{\frac{6}{7}} \approx 0.95$$

Damit berührt die Tangente t_2 den Graphen von $f_2(x)$ an der Stelle $x = \sqrt[3]{\frac{6}{7}}$ und damit im Punkt

$$P_2\left(\sqrt[3]{\frac{6}{7}} \Big/ f_2\left(\sqrt[3]{\frac{6}{7}}\right)\right) \approx P_2\,(0.95/-0.029)$$

2. $P_{\text{(Kunde nicht da)}} = 0.07; \quad P_{\text{(Kunde da)}} = 0.93$

   a) i. $P_{\text{(alle da von 8)}} = (0.93)^8 = 0.56$

   ii. $P_{\text{(3 von 8 nicht da)}} = \binom{8}{3}(0.07)^3 \cdot (0.93)^5 = 0.013$

   iii. $P_{\text{(höchst. 6 von 8 da)}} = 1 - (0.93)^8 - (0.93)^7 \cdot 0.07 \cdot 8 = 0.103$

   b) $P_{\text{(nicht alle da)}} = 1 - P_{\text{(alle da)}} = 1 - 0.56 = 0.44$

   $P_{\text{(2 von 8 nicht da)}} = \binom{8}{2}(0.07)^2 \cdot (0.93)^6 = 0.089$

   $P_{\text{(2 nicht da/nicht alle da)}} = \frac{0.089}{0.44} = 0.202$

   c) $p = 0.93,\ q = 0.07,\ n = 8$. Da Binomialverteilung gilt:

   $$E(X) = pn = 0.93 \cdot 8 = 7.44$$

   oder mit konkreter Berechnung aller W'keiten:

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$P(X)$	$5.76 \cdot 10^{-10}$	$6.13 \cdot 10^{-8}$	$2.85 \cdot 10^{-6}$	$7.57 \cdot 10^{-5}$	0.0013	0.0134	0.089	0.34	0.56

   und damit
   $$E(X) = 0 \cdot 5.76 \cdot 10^{-10} + \cdots + 8 \cdot 0.56 = 7.44$$

   d) $8! = 40'320$ Möglichkeiten;

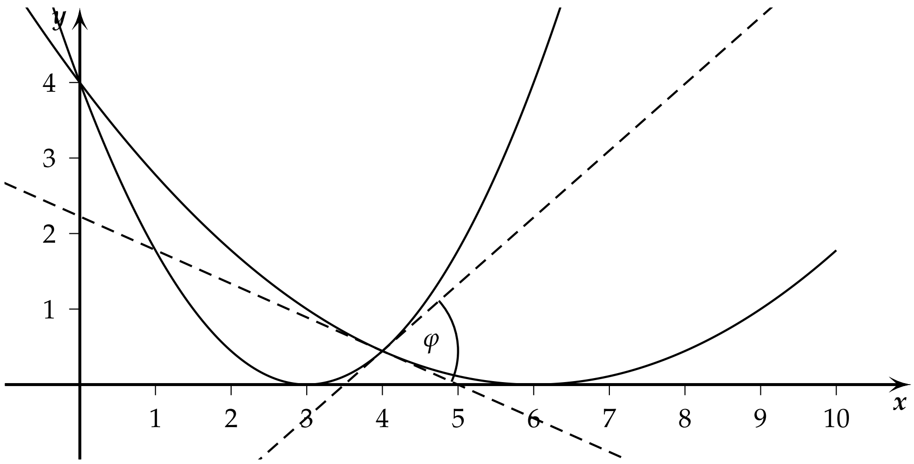
   Alphabetische Reihenfolge entspricht genau einer der oben erwähnten Möglichkeiten:
   $$P_{\text{(alph. Reihenfolge)}} = \frac{1}{40\,320} = 0.000\,024\,8$$

   e) $P_{\text{(mind. 1 Kunde von } n \text{ nicht anwesend)}} = 1 - P_{\text{(alle da von } n)} = 1 - 0.93^n$

   $$\begin{aligned} 1 - (0.93)^n &> 0.75 \\ 0.25 &> (0.93)^n \\ \ln 0.25 &> n \ln 0.93 \\ \frac{\ln 0.25}{\ln 0.93} &< n \\ 19.1 &< n \end{aligned}$$

   Er müsste mindestens 20 Kunden besuchen, damit die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Kunde nicht anwesend ist, grösser als 75% ist.

3. a) *Skizze*



Gegeben sind die beiden Funktionsgleichungen

$$f_1(x) = \frac{1}{9}(x^2 - 12x + 36); \qquad f_2(x) = \frac{1}{9}(4x^2 - 24x + 36)$$

Schnittstellen:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= f_2(x) \\ \frac{1}{9}(x^2 - 12x + 36) &= \frac{1}{9}(4x^2 - 24x + 36) \\ 0 &= 3x^2 - 12x \\ 0 &= 3x(x-4) \end{aligned}$$

und damit

$$x_1 = 0; \quad x_2 = 4$$

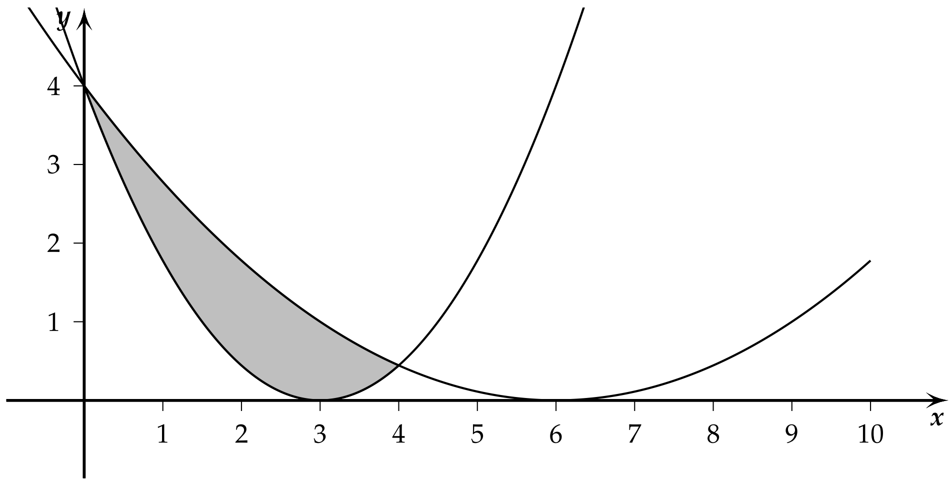
Ableitungen:

$$f_1'(x) = \frac{1}{9}(2x - 12); \quad f_2'(x) = \frac{1}{9}(8x - 24)$$

Für den Winkel an der Schnittstelle $x = 4$ gilt dann mit $f_1'(4) = -\frac{4}{9}$ und $f_2'(4) = \frac{8}{9}$

$$\tan\varphi = \left| \frac{f_1'(4) - f_2'(4)}{1 + f_1'(4) \cdot f_2'(4)} \right| = \frac{108}{49} \quad \Rightarrow \quad \varphi \approx 65.560^\circ$$

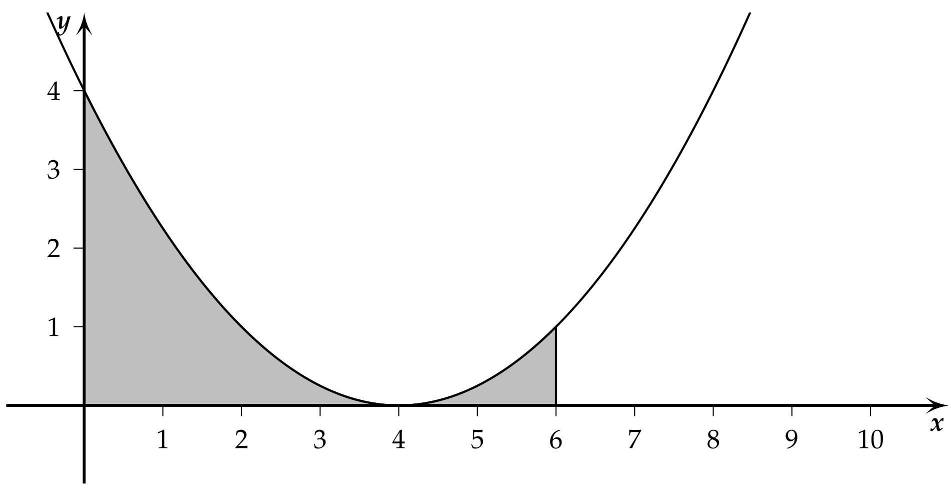
b) *Skizze*



Schnittstellen aus a): $x = 0$ und $x = 4$ sind Integrationsgrenzen

$$F = \int_0^4 (f_1(x) - f_2(x))\ \mathrm{d}x = \frac{1}{9}\int_0^4 \left(-3x^2 + 12x\right)\ \mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{9}\left[-x^3 + 6x^2\right]_0^4$$
$$= \frac{1}{9}[-4^3 + 6 \cdot 4^2] = \frac{32}{9}$$

c) *Skizze* (für $k = 1.5$)



Bemerkung:

Für $k \leq 1$ besteht die Fläche aus einem einfachen Flächenstück, für $k > 1$ aus zwei Teilflächen (wie Skizze oben mit $k = 1.5$). Auch im letzteren Fall kann einfach durchintegriert werden.

Es gilt

$$F(k) = \frac{1}{9}\int_0^6 (k^2x^2 - 12kx + 36)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{k^2x^3}{27} - \frac{2kx^2}{3} + 4x\right]_0^6 = 8k^2 - 24k + 24$$

Die Ableitung null setzen

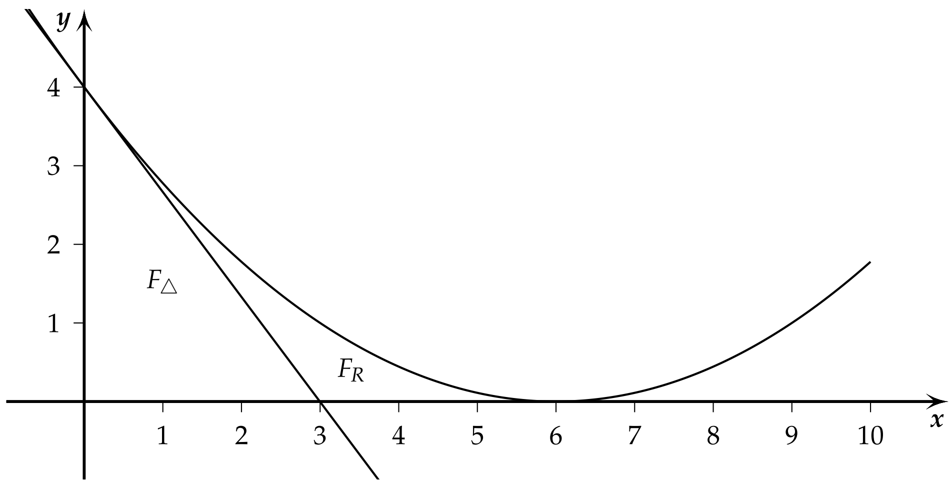
$$(8k^2 - 24k + 24)' = 0 \quad \Rightarrow \quad 16k - 24 = 0 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{3}{2}$$

Wegen

$$F''(k) = 16 > 0$$

haben wir ein Minimum.

d) *Skizze*



Es gilt

$$f(x) = \frac{1}{9}(k^2x^2 - 12kx + 36) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{9}(2k^2x - 12k)$$

Damit erhalten wir für die Steigung

$$f'(0) = \frac{1}{9}(2k^2 \cdot 0 - 12k) = -\frac{12}{9}k = -\frac{4}{3}k$$

und der y-Achsenabschnitt ist $f(0) = 4$:

$$t(x) = -\frac{4}{3}kx + 4$$

Nullstelle der Tangente

$$-\frac{4}{3}kx + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_S = \frac{3}{k}$$

Die Katheten des rechtwinkligen Dreiecks bestehen aus den Intervalle $[0, b]$ und $[0, x_S]$. Die Fläche des Dreiecks ist dann (da $b, x_S > 0$)

$$F_\triangle = \frac{bx_S}{2} = \frac{4 \cdot \frac{3}{k}}{2} = \frac{6}{k}$$

Nullstelle der Funktion f_k

$$kx - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{6}{k}$$

Für die Fläche zwischen den Koordinatenachsen und dem Graphen gilt dann:

$$F = \frac{1}{9}\int_0^{\frac{6}{k}} (k^2x^2 - 12kx + 36)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{k^2x^3}{27} - \frac{2kx^2}{3} + 4x\right]_0^{\frac{6}{k}} = \frac{8}{k}$$

Die Restfläche ist dann

$$F_R = F - F_\triangle = \frac{8}{k} - \frac{6}{k} = \frac{2}{k}$$

und somit das Verhältnis

$$F_\triangle : F_R = \frac{6}{k} : \frac{2}{k} = 3 : 1$$

4. a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}10\\0\\-5\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \overline{AB} = \left|\begin{pmatrix}10\\0\\-5\end{pmatrix}\right| = 5\left|\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}\right| = 5\sqrt{5} \approx 11.18$

b) $D(1+3t/2+2t/2-t) \in g$. Damit gilt für $\overrightarrow{BD}$

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix}1+3t\\2+2t\\2-t\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5\\1\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4+3t\\1+2t\\6-t\end{pmatrix}$$

Wegen $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BD}$ gilt $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$:

$$\begin{pmatrix}10\\0\\-5\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-4+3t\\1+2t\\6-t\end{pmatrix} = -40+30t-30+5t = -70+35t = 0 \quad \Rightarrow \quad t=2$$

Und damit

$$\overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\6\\0\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad D(7/6/0)$$

c) $E = (ABC)$: Parametergleichung

$$\vec{r} = \overrightarrow{OA} + u\overrightarrow{AB} + v\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}-5\\1\\1\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}10\\0\\-5\end{pmatrix} + v\begin{pmatrix}12\\5\\-1\end{pmatrix}$$

Das ergibt das zugehörige Gleichungssystem der Komponentengleichungen:

$$\left|\begin{array}{rcrcrcr} x &=& -5 &+& 10u &+& 12v \\ y &=& 1 & & &+& 5v \\ z &=& 1 &-& 5u &-& v \end{array}\right|$$

Elimination von u und v:

$$\begin{array}{r} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array}\left|\begin{array}{rcrcrcr} x &=& -5 &+& 10u &+& 12v \\ y &=& 1 & & &+& 5v \\ z &=& 1 &-& 5u &-& v \end{array}\right| \xrightarrow[\mathrm{II}]{\mathrm{I+2III}} \begin{array}{r} \mathrm{IV} \\ \mathrm{V} \end{array}\left|\begin{array}{rcrcrcr} x &+& 2z &=& -3 &+& 10v \\ & & y &=& 1 &+& 5v \end{array}\right| \xrightarrow{\mathrm{IV-2V}} x-2y+2z=-5$$

Und damit

$$E: x-2y+2z+5=0$$

d) Der Normalenvektor der Ebene E ist $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Parametergleichung der Geraden h durch B senkrecht auf Ebene E:

$$h : \overrightarrow{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

S liegt auf h:

$$\overrightarrow{BS} = \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

und hat von B Abstand 9

$$\left|\overrightarrow{BS}\right| = 9 \quad \Rightarrow \quad \left| t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right|^2 = 81 \quad \Rightarrow \quad 9t^2 = 81 \quad \Rightarrow \quad t = \pm 3$$

Diese Werte in die Parametergleichung eingesetzt, liefert für $t = 3$

$$\overrightarrow{OS_1} = \overrightarrow{OB} + 3\,\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad S_1(8/-5/2)$$

und für $t = -3$

$$\overrightarrow{OS_2} = \overrightarrow{OB} - 3\,\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -10 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad S_2(2/7/-10)$$

Einfacher: Berechnet man $\left|\overrightarrow{n}\right| = 3$ und mit $\overline{BS} = 9$ erhält man die Gleichungen oben direkt.

e) Da A und B in der Ebene liegen und $BS \perp E$, haben wir ein rechtwinkliges Dreieck und es gilt

$$\tan\gamma = \frac{\overline{BS}}{\overline{AB}} = \frac{9}{5\sqrt{5}} \approx 0.805 \quad \Rightarrow \quad \gamma \approx 38.38^\circ$$

Der Winkel ist für beide Punkte S_1 und S_2 aus d) gleich.

5. a) Mittelpunkt M von k:

$$x^2+y^2+6y-16=0 \quad\Rightarrow\quad x^2+(y+3)^2-9-16=0 \quad\Rightarrow\quad x^2+(y+3)^2=25$$

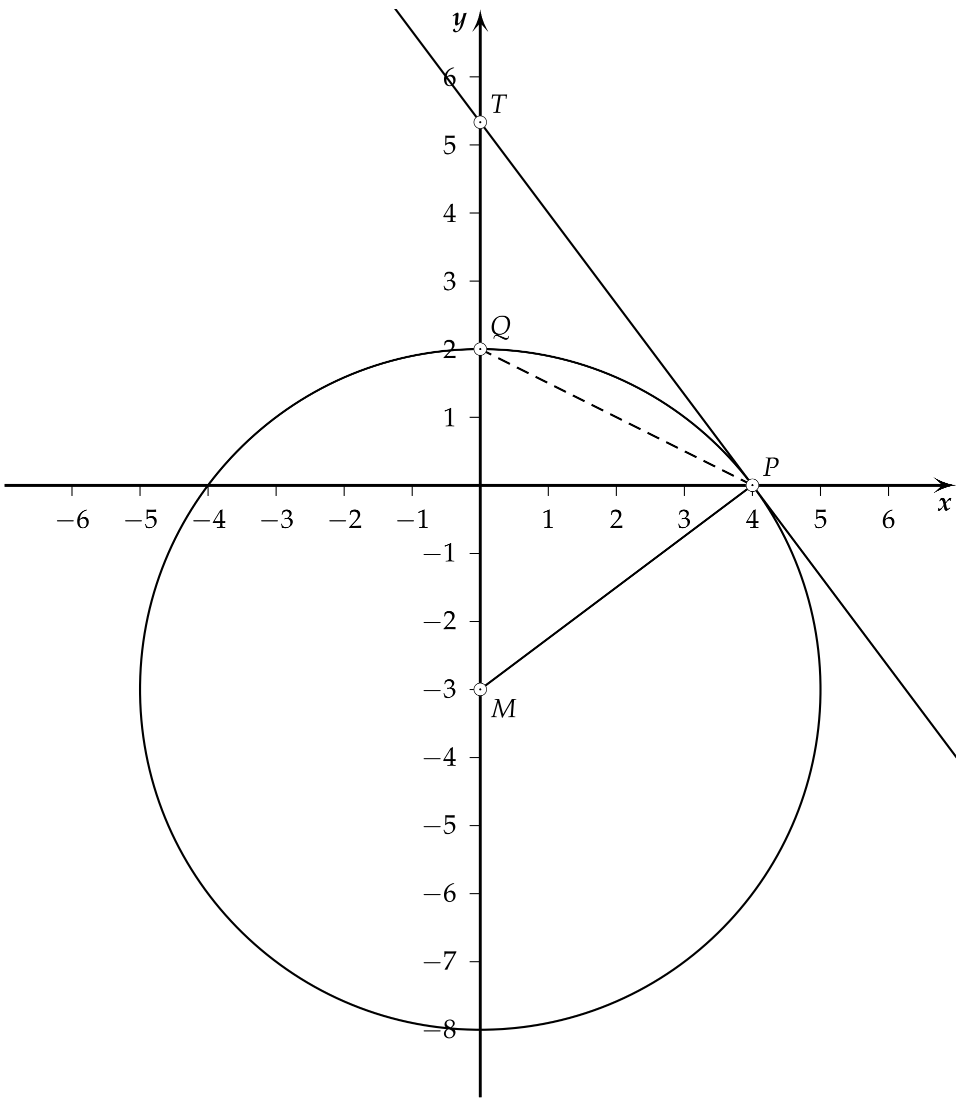
Damit $M(0/-3)$.

Punkt $P \in k$ und $y_P = 0$ (wegen $x_P > 0$ nur positive Lösung)

$$\Rightarrow \quad x_P^2-16=0 \quad\Rightarrow\quad x_P=4 \quad\Rightarrow\quad P(4/0)$$

Punkt $Q \in k$ und $x_Q = 0$ (wegen $y_Q > 0$ nur positive Lösung)

$$(y_Q+3)^2=25 \quad\Rightarrow\quad y_Q+3=\pm 5 \quad\Rightarrow\quad y_Q=2 \quad\Rightarrow\quad Q(0/2)$$



Tangente t:

$$m_{MP} = \frac{y_P - y_M}{x_P - x_M} = \frac{0-(-3)}{4-0} = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad m_t = -\frac{1}{m_{MP}} = -\frac{4}{3}$$

In $t : y = -\frac{4}{3}x + b$ die Koordinaten von P eingesetzt

$$0 = -\frac{4}{3} \cdot 4 + b \quad \Rightarrow \quad b = \frac{16}{3}$$

und damit

$$T\left(0 \middle/ \frac{16}{3}\right)$$

b) Für alle Aufgaben gibt es $\binom{3}{1}$ Möglichkeiten für den Torhüter und $\binom{6}{2}$ Möglichkeiten für die Verteidiger.

i. $\binom{12}{3}$ Möglichkeiten für die Stürmer

$$\binom{3}{1} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{12}{3} = 9'900 \text{ Möglichkeiten}$$

ii. $\binom{11}{2}$ Möglichkeiten für die Stürmer (Paul ist gesetzt, also noch 2 von den anderen)

$$\binom{3}{1} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{11}{2} = 2'475 \text{ Austellungen}$$

iii. $\binom{11}{3}$ Möglichkeiten für die Stürmer (Paul fehlt, also noch 3 von den anderen)

$$\binom{3}{1} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{11}{3} = 7'425 \text{ Austellungen}$$

c) Substitution: $u = \mathrm{e}^x$

$$u^2 - au + 4 = 0$$

Für *genau* eine Lösung, muss die Diskriminante 0 sein:

$$D = a^2 - 16 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \pm 4$$

Für $a = 4$ erhalten wir

$$u^2 - 4u + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad u_1 = u_2 = 2 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{e}^x = 2 \quad \Rightarrow \quad x = \ln 2$$

Für $a = -4$ erhalten wir

$$u^2 + 4u + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad u_1 = u_2 = -2 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{e}^x = -2 \quad \Rightarrow \quad \textit{keine reelle Lsg.}$$