Lösung der Aufgabe 1:

a) f(x) = $\dfrac{x^3 - 27x + 54}{6(x-2)} = \dfrac{(x+6)\cdot(x-3)^2}{6(x-2)}$ $\Rightarrow$ $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

f'(x) = $\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{(3x^2-27)\cdot(x-2)-(x^3-27x+54)\cdot 1}{(x-2)^2} = \dfrac{1}{3}x^2\cdot\dfrac{x-3}{(x-2)^2}$

f''(x) = $\dfrac{1}{3}x\cdot\dfrac{x^3-6x+12}{(x-2)^3}$ (vorgegeben)

Nullstellen : x^3 - 27 x + 54 = 0. Durch Probieren findet man die Nullstelle x = 3.

Polynomdivision : $(x^3 - 27x + 54) : (x-3) = x^2 + 3x - 18 = (x-3)\cdot(x+6)$

$$\begin{array}{l}
\underline{x^3 - 3x^2} \\
\quad 3x^2 - 27x + 54 \\
\quad \underline{3x^2 - 9x} \\
\qquad - 18x + 54 \\
\qquad \underline{- 18x + 54}
\end{array}$$

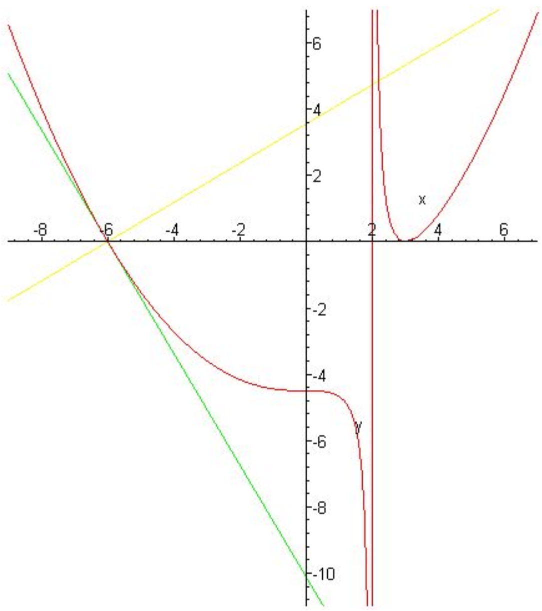
x_1 = 3 ist doppelte Nullstelle, x_2 = -6 einfache Nullstelle des Zählers

Extrema : f'(x) = 0

$2x^3 - 6x^2 = 0 \Leftrightarrow 2x^2\cdot(x - 3) = 0$ horizontale Tangenten bei x_3 = 0 und x_4 = 3

f''(0) = 0 keine Aussage möglich P(0|-4.5) ist Punkt mit horizontaler Tangente

f''(3) = 3 > 0, x_4 = 3 ist Minimalstelle T(3|0) ist Tiefpunkt



Asymptoten : vertiale Asymptote bei x = 2, keine horizontale oder schiefe Asymptote, da der Grad des Nenner > Grad des Zählers + 1 .
Pol bei x = 2

c) M(-6|0) m = f'(-6) = $-\frac{27}{16}$

Ansatz für die Tangente t : $y = -\frac{27}{16}\cdot x + q_t$

N(-6|0) $\in$ t : $0 = -\frac{27}{16}\cdot(-6) + q_t$

$\Rightarrow q_t = -\frac{81}{8}$

Tangentengleichung $y = -\frac{27}{16}\cdot x - \frac{81}{8}$

Ansatz für die Normale n : $y = \frac{16}{27}\cdot x + q_n$

N(-6|0) $\in$ n : $0 = \frac{16}{27}\cdot(-6) + q_n$ $\Rightarrow q_n = \frac{32}{9}$

Gleichung der Normalen $y = \frac{16}{27}\cdot x + \frac{32}{9}$

Flächeninhalt des Dreiecks :

$F = \frac{1}{2}\cdot(q_n - q_t)\cdot|x_N| = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{32}{9} + \frac{81}{8}\right)\cdot 6 = \frac{985}{24} = 41.04...$

Lösung der Aufgabe 2 :

a) Parametergleichung der Ebene E: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

[Es ist $\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}$, also lautet die Koordinatengleichung der Ebene E :

2x - 6y + 5z + const. = 0; durch Einsetzen von A erhält man const. = 22, also die Gleichung 2x - 6y + 5z + 22 = 0]

b) $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{CD} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{DA} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

[D liegt auf E : wähle u = -2, v = 1 oder : Einsetzen in die Koordinatengleichung :
$2 \cdot 1 - 6 \cdot 4 + 5 \cdot 0 - 22 = 0$]

Das Viereck ist ein Parallelogramm, $\vec{AB} = -\vec{CD}$ und $\vec{BC} = -\vec{DA}$, also ist auch D in der Ebene E .

Winkel: $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = |AB| \cdot |AD| \cdot \cos\alpha$; $\cos\alpha = \frac{4}{9} \approx 0.\overline{4}$, $\alpha = 63^\circ.6122000...$

c) P liegt auf der Geraden (CD) mit der Gleichung $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Es muss gelten :

$\vec{PA} \cdot \vec{PB} = 0$: $\vec{AP} \cdot \vec{BP} = \begin{pmatrix} -2+t \\ 1+2t \\ 2+2t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4+t \\ -3+2t \\ -2+2t \end{pmatrix} = 8-6t+t^2-3-4t+4t^2-4+4t^2 = 9t^2-10t+1 = 0$

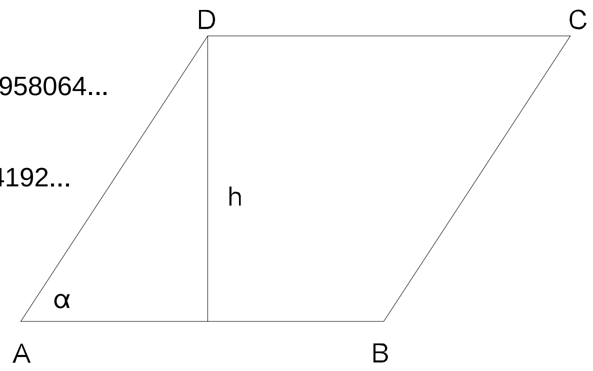
Man erhält die Werte $t_1 = 1$ und $t_2 = 1/9$.

Die Punkte $P_1(2/6/2)$ und $P_2(\frac{10}{9} / \frac{38}{9} / \frac{2}{9})$ bilden mit den Punkten A und B ein rechtwinkliges Dreieck.

d) $h = |AD| \cdot \sin\alpha = 3 \cdot 0.8958064...$
$= 2.6874192...$

$F = |AB| \cdot h = 6 \cdot 2.6874192...$

$F = 16.1245154...$



[Einfachere Lösung über das Vektorprodukt :

$F = \left|\vec{AB} \times \vec{AD}\right| = \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{4^2 + (-12)^2 + 10^2} = \sqrt{260}$]

Lösung der Aufgabe 3 :

für a = 5, b = ½

a) Nullstellen : $a \cdot \sqrt{x} = b \cdot x \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0, x_2 = \frac{a^2}{b^2}$ $\qquad x_1 = 0,\ x_2 = 100$

Extrema : $f'(x) = \frac{a}{2\sqrt{x}} - b$

$f'(x) = 0 \qquad \frac{a}{2\sqrt{x}} = b \quad \Rightarrow \quad x_3 = \frac{a^2}{4b^2}$ $\qquad x_3 = 25$

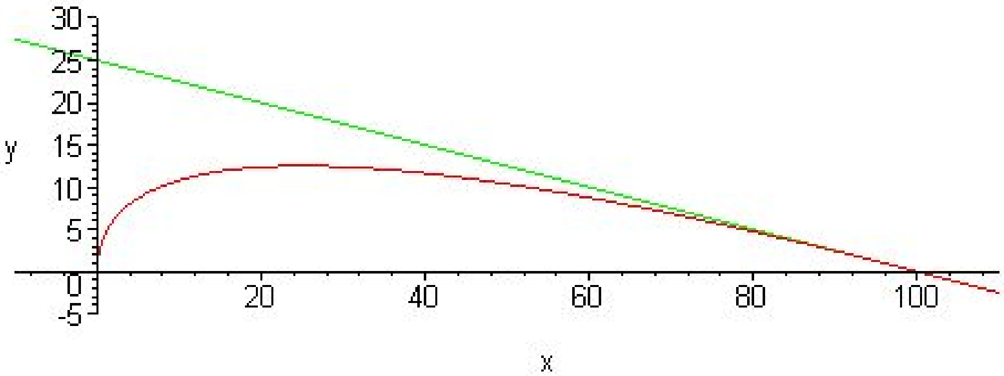
$y_3 = f(x_3) = \quad a \cdot \frac{a}{2b} - b \cdot \frac{a^2}{4b^2} = \frac{a^2}{4b} \quad ; \quad D = \quad 2y_3 = \frac{a^2}{2b}$ $\qquad D = 25$

Tangentengleichungen : x = 0 $\qquad$ x = 0

Tangente bei x_2 :

$f'(x_2) = \frac{a}{2\frac{a}{b}} - b = -\frac{b}{2} \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{b}{2}(x - \frac{a^2}{b^2}) = -\frac{b}{2}x + \frac{a^2}{2b}$ $\qquad y = -\ 0.25\ x + 25$

Die Länge des Körpers beträgt 100, der Durchmesser 25



b) $V = \pi \cdot \int_0^{100} f^2(x)dx = \pi \int_0^{100} (5\sqrt{x} - 0.5x)^2 dx = \pi \int_0^{100} (25x - 5x^{\frac{3}{2}} + 0.25x^2)dx =$

$= \pi \cdot \left[\frac{25}{2}x^2 - \frac{5}{2.5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{0.25}{3}x^3 \right]_0^{100} = \pi \cdot 8333.3\ldots \approx 26180$

c) $L = \frac{a^2}{b^2}$, $D = \frac{a^2}{2b} \quad \Rightarrow \quad D = \frac{L \cdot b^2}{2b} = \frac{1}{2} L \cdot b$

$b = \frac{2D}{L} = \frac{2 \cdot 27}{81} = \frac{2}{3} \qquad a = \sqrt{\frac{4D^2}{L}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 27^2}{81}} = \sqrt{36} = 6$

d) $\frac{D}{L} = \frac{\frac{a^2}{2b}}{\frac{a^2}{b^2}} = \frac{b}{2}$ $\qquad$ Für b = ⅔ folgt $\frac{D}{L}$ = ⅓, also D = ⅓ L

Lösung der Aufgabe 4 :

P("0") = $\frac{7}{16}$, P("1") = $\frac{4}{16}$, P("2") = $\frac{3}{16}$, P("3") = $\frac{2}{16}$

a) P(/A) = P("1" $\cap$ "1") = $\frac{4}{16}\cdot\frac{3}{15}=\frac{1}{20}$

P(B) = P(mindestens ein Feld 0) = 1 - P(kein Feld 0) = 1 - P(" $\overline{0}$ " $\cap$ " $\overline{0}$ ") = $1-\frac{9}{16}\cdot\frac{8}{15}=\frac{7}{10}$

b) P(kein Feld 0) = $\frac{3}{10}$ = 0.3

10 Karten, 4 Gewinne : binomialverteilt $\qquad P_{10}(4) = \binom{10}{4}(0.3)^4\,(0.7)^6 = 0.2001...$

c) P("3" $\cap$ "3") = $\frac{2}{16}\cdot\frac{1}{15}=\frac{1}{120}$; P(nicht zweimal die 3) = 1 - P("3" $\cap$ "3") =

Beda kauft n Karten : $\left(\frac{119}{120}\right)^n \le 0.5$

$n \ge 82{,}8$ Beda muss mindestens 83 Karten kaufen.

d) P(zwei verschiedene Zahlen $\ge$ 1) = P[("1" $\cap$ ("2" $\cup$ "3")) $\cup$ ("2" $\cap$("1" $\cup$ "3")) $\cup$ ("3" $\cap$("1" $\cup$ "2"))] =

$$= \frac{4}{16}\cdot\frac{5}{15}+\frac{3}{16}\cdot\frac{6}{15}+\frac{2}{16}\cdot\frac{7}{15}=\frac{13}{60}$$

P("2" $\cap$ "2") = $\frac{3}{16}\cdot\frac{2}{15}=\frac{1}{40}$

Die Zufallsvariable X (Gewinn) kann die Werte 0, 1, 5, 10 oder 30 annehmen :

X	0	1	5	10	30
P(X)	$\frac{7}{10}$	$\frac{13}{60}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{120}$
	a)	d)	a)	d)	c)

$E(X) = 0\cdot\frac{7}{10} + 1\cdot\frac{13}{60} + 5\cdot\frac{1}{120} + 10\cdot\frac{1}{40} + 30\cdot\frac{1}{120} = \frac{29}{30} = 0.96...$

Lösung der Aufgabe 5 :

a) $x^2\cdot e^2 = 2e^x \Rightarrow \qquad (x^2-2)\cdot e^x = 0 \quad \Rightarrow \qquad x_1 = -\sqrt{2}\ ,\ x_2 = \sqrt{2}$

$$\int (x^2-2)\cdot e^x\,dx = (x^2-2) - \int 2x\cdot e^x\,dx =$$

$$= (x^2-2)\cdot e^x - 2\cdot\left(x\cdot e^x - \int 1\cdot e^x\,dx\right) = (x^2-2)\cdot e^x - 2\cdot(x\cdot e^x - e^x) + C = (x^2-2x)\cdot e^x + C,\ \ C \in \mathbb{R}$$

$$F = \left|\left[(x^2-2x)\cdot e^x\right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\right| = \left|(2-2\sqrt{2})\cdot e^{\sqrt{2}} - (2+2\sqrt{2}\cdot e^{-\sqrt{2}}\right| = |-4.589\ ...| = 4.58...$$

b) Die Ebene E hat die Vektoren $\vec{AB} = \begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix}$ und $\vec{AC} = \begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$ als Richtungsvektoren, hat also

die Parametergleichung $\qquad E: \quad \vec{r} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + u\cdot\begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix} + v\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$.

[Alternative Lösung : Koordinatengleichung (Achsenabschnittform)

$\frac{x}{1}+\frac{y}{3}+\frac{z}{2}-1=0 \quad \Leftrightarrow \quad 6\cdot x + 2\cdot y + 3\cdot z - 6 = 0$]

Der Richtungsvektor der Geraden g ist $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 18 \\ 7-p \\ q+1 \end{pmatrix}$, die Gleichung der Geraden ist also g :

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} -7 \\ p \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 18 \\ 7-p \\ q+1 \end{pmatrix}$$

Die Gerade steht senkrecht zur Ebene, wenn $\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ ist :

$\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 18 \\ 7-p \\ q+1 \end{pmatrix}$ = -18 + 21 - 3p + 0 = 3 - 3p = 0, woraus sich p = 1 ergibt, also P(-7|1|-1)

$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 18 \\ 6 \\ q+1 \end{pmatrix}$ = -18 + 0 + 2q + 2 = -16 + 2q = 0, woraus man q = 8 erhält und Q(11|7|8).

[Alternative Lösung : Da $\overrightarrow{PQ} \perp E$, so folgt $\overrightarrow{PQ} = 3 \cdot \vec{n}_E \Rightarrow$ p = 1, q = 8]

Die Gerade hat den Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 18 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Da den Maturandinnen und Maturanden die Abstandsformel mit der Hesseschen Normalform nicht bekannt ist, muss der Durchstosspunkt der Geraden g mit der Ebene E bestimmt werden :

$$\begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Man erhält das System $\left| \begin{array}{l} 8 - u - v - 6t = 0 \\ -1 + 3u - 2t = 0 \\ 1 + 2v - 3t = 0 \end{array} \right|$

Aus der zweiten Gleichung erhält man 3u = 1 + 2t und aus der dritten Gleichung 2v = -1+ 3t, was in der ersten Gleichung eingesetzt t = 1 ergibt.
Der Durchstosspunkt ist der Punkt D(–1|3|2), der Abstand von P zur Ebene E beträgt

$\left|\overrightarrow{PD}\right| = \left\| \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(-6)^2 + (-2)^2 + 3^2} = 7$, der Abstand von Q zur Ebene beträgt

$\left|\overrightarrow{PD}\right| = \left\| \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(12)^2 + (4)^2 + 6^2} = 14$