1

Lösung: Maturaserie 2005

Lösung 1b)

$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 - 25 = (x-2)^2 + (y+1)^2 - 25 = 0$

Es handelt sich um den Kreis mit Mittelpunkt M(2 | -1) und Radius R = 5. 1

Diagonale durch den Mittelpunkt : $y = \frac{3}{4}x + q$ durch M(2 | -1) :

$-1 = \frac{3}{4} \cdot 2 + q \implies q = -\frac{5}{2}$

Gleichung der Geraden g, die die Diagonale trägt : $y = \frac{3}{4}x - \frac{5}{2}$ 1

Schneiden mit dem Kreis : $(x-2)^2 + (\frac{3}{4}x - \frac{3}{2})^2 = 25$

$x^2 - 4x + 4 + \frac{9}{16}x^2 - \frac{9}{4}x + \frac{9}{4} = 25 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 12 = 0$

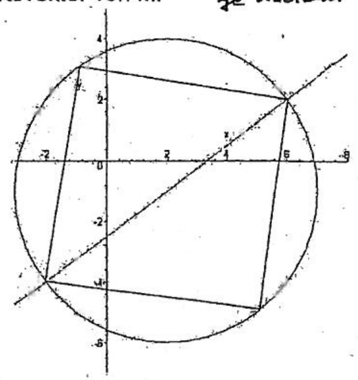
Die quadratische Gleichung hat die Lösungen $x_1 = -2$ und $x_2 = 6$.
Die Schnittpunkte von g mit dem Kreis sind A(-2 | -4) und C(6 | 2) (Ecken des Quadrats). 1

Die Länge der Diagonalen beträgt 10.
Die andern beiden Ecken erhält man durch schneiden einer Normalen n zur Geraden g mit dem Kreis oder (einfacher) durch Addition bzw. Subtraktion des zum Vektor $\frac{\overrightarrow{AC}}{2}$ normalen Vektor gleicher Länge zum Ortsvektor von M: $\boxed{\text{Ansatz}} \Rightarrow 1$ je nachdem

$$\vec{r}_M \pm \left(\frac{\overrightarrow{AC}}{2}\right)_\perp = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Man erhält : B(5 | -5) und D(-1 | 3). 1

Die Quadratfläche beträgt $A = (\frac{10}{\sqrt{2}})^2 = 50$. 1



, 1

1a)

$$\int_0^x (t^2 - 13t + 30)\,dt = 0$$

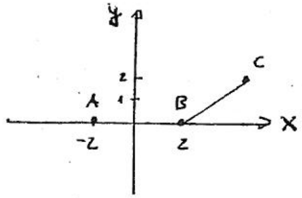
$$= \left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{13}{2}t^2 + 30t\right]_0^x = 0$$

$$= \frac{1}{3}x^3 - \frac{13}{2}x^2 + 30x = 0 \Rightarrow x\left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{13}{2}x + 30\right) = 0$$

$$x_1 = 0 \qquad x_{2,3} = \frac{\frac{13}{2} \pm \sqrt{(\frac{13}{2})^2 - 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 30}}{2 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{\frac{13}{2} \pm 1.5}{\frac{2}{3}} \begin{cases} 12 \\ 7.5 \end{cases}$$

2a) $g(x) = a(x^2-4)$

$g(x) = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \underline{\underline{\pm 2}}$, $\underline{\underline{y = 2}}$



1

$f(x) = \begin{cases} g(x) \\ t: y = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}, \quad m_{BC} = \frac{2-0}{5-2} = \frac{2}{3} \end{cases}$

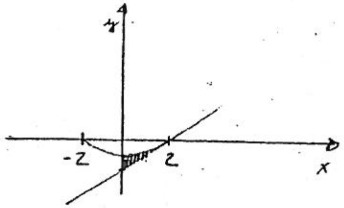
differenzierbar in $x_0 = 2$

- $g(2) = t(2) = 0$
- $g'(2) = 4a = \frac{2}{3} \Rightarrow a = \underline{\underline{\frac{1}{6}}}$ 1

b) $f(x) = \frac{1}{6}(x^2-4)$

$f(x) = \frac{1}{6}x^2 - \frac{2}{3}$

$f'(x) = \frac{1}{3}x \qquad f'(2) = \frac{2}{3}$



$t: y = \frac{2}{3}x + c$

für $x = 2$: $0 = \frac{2}{3}\cdot 2 + c \Rightarrow c = -\frac{4}{3} \Rightarrow t: y = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$ 1

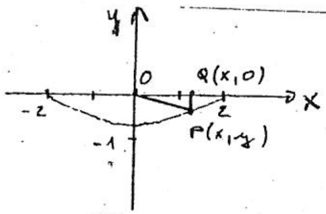
$$V = \pi \int_0^2 \left[\left(\frac{2}{3}x - \frac{4}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{6}x^2 - \frac{2}{3}\right)^2\right] dx$$ 1

$$= \pi \int_0^2 \left(-\frac{1}{36}x^4 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{16}{9}x + \frac{4}{3}\right) dx$$

$$= \pi\left[-\frac{1}{180}x^5 + \frac{2}{9}x^3 - \frac{8}{9}x^2 + \frac{4}{3}x\right]_0^2 = \underline{\underline{\pi \cdot \frac{32}{45}}} \approx 2.23402$$ 1

c) $A_t(x) = x \cdot \left(\frac{1}{6}x^2 - \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{3}x$ 1



$A_t'(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{3}$

$A_t'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x^2 = \frac{1}{3} \qquad x_{1(2)} = (\pm)\sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$A_t''\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) < 0 \Rightarrow A_t(x)$ maximal für $\underline{\underline{P\left(\frac{2\sqrt{3}}{3} \,\middle|\, -\cancel{\frac{4\sqrt{3}}{27}}\right)}}$ $-\frac{4}{9}$

L 1

d) $\left|\int_{-2}^{2} (ax^2 - 4a)\, dx\right| = 64$ ohne Betrag, Rest richtig

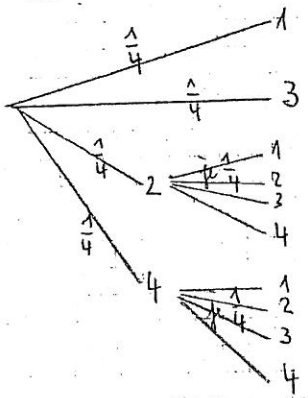
$\left|\left[\frac{a}{3}x^3 - 4ax\right]_{-2}^{2}\right| = 64$ 1

$\left|-\frac{32}{3}a\right| = 64 \qquad a_{1,2} = \underline{\underline{\pm 6}}$ 1

(3)

Lösung Wahrscheinlichkeit

Baumdiagramm:



x: Auszahlung in Fr.
1
3
3
4
5
6
5
6
7
8

Ansatz: 1

a) Verteilung von X

X	1	3	4	5	6	7	8
p(x)	$\frac{4}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

{ richtige Auszahlungen 1

1

Erwartungswert $\mu = E(x) = \frac{1}{16}(4 + 15 + 4 + 10 + 12 + 7 + 8)$

$\underline{\underline{\mu}} = \frac{60}{16} = \underline{\underline{\frac{15}{4}}}$ (in Franken) 1

Da man Fr. 4.- Einsatz zahlt ist Spiel nicht fair.

b) Ereignis B: Man erhält mehr als Fr. 4.- ausbezahlt

$P(B) \doteq \underline{\underline{p}} = P(x > 4) = \frac{6}{16} = \underline{\underline{\frac{3}{8}}}$ 1

c) Bedingte W'keit

1

$P(x = 3 \text{ im 1. Wurf} \mid x = 3) = \frac{P(x=3 \text{ im 1. Wurf})}{P(x=3)} = \frac{\frac{4}{16}}{\frac{5}{16}} = \underline{\underline{\frac{4}{5}}}$

(direkt: in 4 von 5 gleich wahrscheinliche Fällen)

1

3d) Binomialverteilung: $n = 10$, $p = \frac{3}{8}$ $(= P(B))$

$P_{10}(y \geq 5) = \underline{\sum_{y=5}^{10} \binom{10}{y} \left(\frac{3}{8}\right)^y \left(\frac{5}{8}\right)^{10-y}} \overset{TI}{\approx} \underline{\underline{0{,}3057}}$

1 1

e) Man muss mindestens x Spiele machen

$P_x(\text{mind. einmal } B) = 1 - P_x(B \text{ tritt nie ein})$

$= 1 - \left(\frac{5}{8}\right)^x \geq 0{,}99$ 1

$\left(\frac{5}{8}\right)^x \leq 0{,}01$

$x \geq \frac{\ln 0{,}01}{\ln \frac{5}{8}} \approx 9{,}798$

Man muss mindestens $\underline{\underline{10 \text{ Spiele}}}$ machen 1

4.) $f(x) = 2e^{-x}$ $\qquad g(x) = -2x e^{-x}$

Schnitt: $e^{-x} = -x e^{-x} \Rightarrow x = -1 \quad S(-1|2e)$

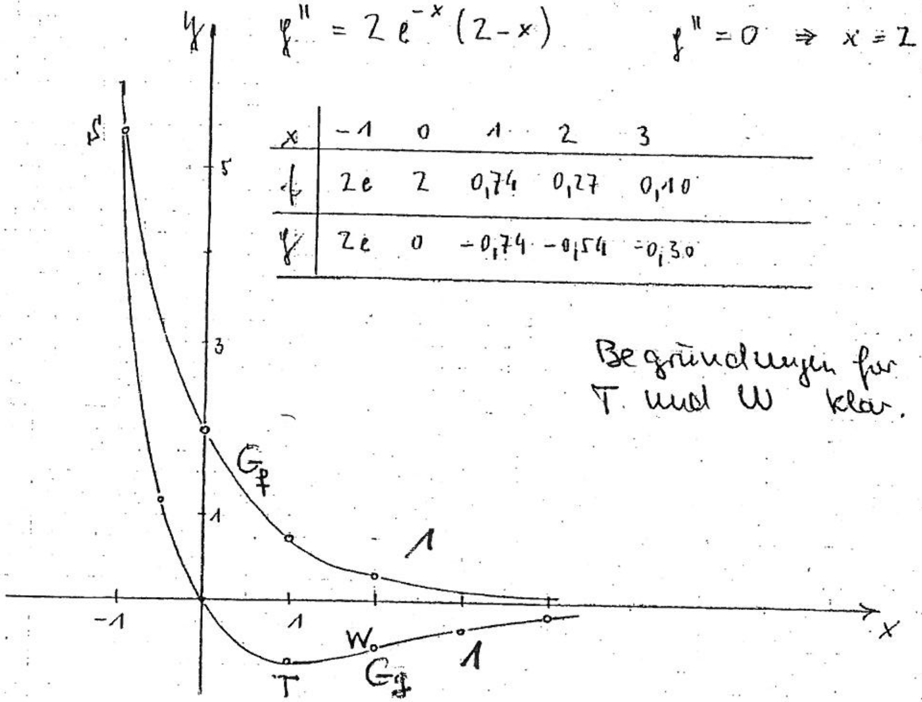
Grenzw.: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0 \qquad \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$ 1

Extr. u. Wdp. von g:

$g' = -2e^{-x}(1-x) \qquad g' = 0 \Rightarrow x = 1$, Min T 1 $(1|\frac{-2}{e})$

$g'' = 2e^{-x}(2-x) \qquad g'' = 0 \Rightarrow x = 2$, Wdp. W $(2|-4e^{-2})$

Wp fehlt, Rest richtig



x	-1	0	1	2	3
f	2e	2	0,74	0,27	0,10
g	2e	0	-0,74	-0,54	-0,30

Begründungen für T und W klar.

1 1 1

b) $\Delta = f - g = \text{Max}$

$\Delta = 2e^{-x} - (-2e^{-x} \cdot x) = 2e^{-x}(1+x)$ 1

$\Delta' = -2e^{-x}(1+x) + 2e^{-x} = -2e^{-x} \cdot x$

$\Delta' = 0$ bei $x = 0$, $\underbrace{\Delta'(-\varepsilon) > 0, \ \Delta'(\varepsilon) < 0}_{\text{überprüft}}$ 1

$\Delta(0) = 2$ 1

4c) Fläche $A = \int_{-1}^{\infty} (f-g)\,dx = \int_{-1}^{\infty} (2e^{-x} + 2x e^{-x})\,dx$

$A = 2\int_{-1}^{\infty} e^{-x}(1+x)\,dx$ 1

$\int e^{-x}(1+x)\,dx = -e^{-x}(1+x) - \int -e^{-x}\,dx =$

$= -e^{-x}(1+x) - e^{-x} = -e^{-x}(x+2)$ 1

$A = \lim\limits_{a\to\infty} \left[-2e^{-x}(x+2)\right]_{-1}^{a} = \lim\limits_{a\to\infty} \left\{-2e^{-a}(a+2) - [-2e(-1+2)]\right\}$

$= \lim\limits_{a\to\infty} \left[-2e^{-a}(a+2) + 2e\right] = 2e \approx 5,437$ 1

$\int_{-1}^{e} (2e^{-x} + 2x e^{-x})\,dx$

5 Lösungen Raumgeometrie

a) Ebene $E = ABC$

$\vec{AB} = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{AC} = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$, $A(3|1|1)$

$E: \vec{r} = \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ 1

$E: \left| \begin{array}{l} x = 3 + s - t \\ y = 1 + s + t \\ z = 1 - s + t \end{array} \right| \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}$

Summe von x und z eliminiert beide s und t:

$\underline{E: \; x + z = 4}$ ist Koordinatengleichung 1

Normalenvektor $\vec{n}_E = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

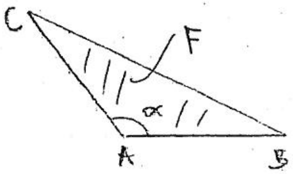
b) Winkel α des Δ's ABC bei A: $\alpha = \measuredangle(\vec{AB}, \vec{AC})$

(egal welcher)

$\underline{\cos\alpha} = \frac{\vec{AB}\cdot\vec{AC}}{|\vec{AB}|\,|\vec{AC}|} = \frac{-1+1-1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \underline{-\frac{1}{3}}$ 1 1

$\rightarrow \underline{\alpha \approx 109{,}47^\circ}$ 1

c) Da $|\vec{AB}| = |\vec{AC}| = \sqrt{3}$ (1), so ist ΔABC gleichschenklig



Inhalt $F = \frac{1}{2}|\vec{AB}|\,|\vec{AC}| \cdot \sin\alpha$

Da $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$, so $\sin\alpha = \sqrt{1-\frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\underline{\underline{F}} = \frac{1}{2}\cdot 3 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = \underline{\underline{\sqrt{2}}}$ 1

5 d) $s = E \cap \Delta$ $\begin{array}{l} E: \\ \Delta: \end{array} \left| \begin{array}{l} x + z = 4 \\ 3x + 4y - z = 16 \end{array} \right|$

$z = t$, $x = 4 - t$

$4y = 16 + t - 12 + 3t = 4 + 4t$

$y = 1 + t$ 1

$\underline{\underline{s: \vec{r} = \begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}}}$, $s \parallel (AC)$, $A \notin s \rightarrow \underline{\underline{s \cap (AC) = \emptyset}}$ 1

e) Da $\vec{CD} = \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \vec{n}_E$ 1 (s. a)),

so ist $CD \perp E$.

$\underline{\underline{\text{Volumen } V}} = \frac{1}{3}\cdot F \cdot |\vec{CD}| = \frac{\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}}{3} = \underline{\underline{\frac{2\cdot 2}{3}}} = \underline{\underline{\frac{4}{3}}}$ 1

– Falsche Fläche bei c) → falsches V bei e)