Lösung der Aufgabe 1:

a) $D = \mathbb{R}$

Nullstellen : $f(x) = 4 \cdot x \cdot e^{-\frac{1}{2}x} = 0$ für $x = 0$

Asymptoten : $\lim\limits_{x \to \infty} 4 \cdot x \cdot e^{-\frac{1}{2}x} = 0$, also ist die x-Achse horizontale Asymptote.

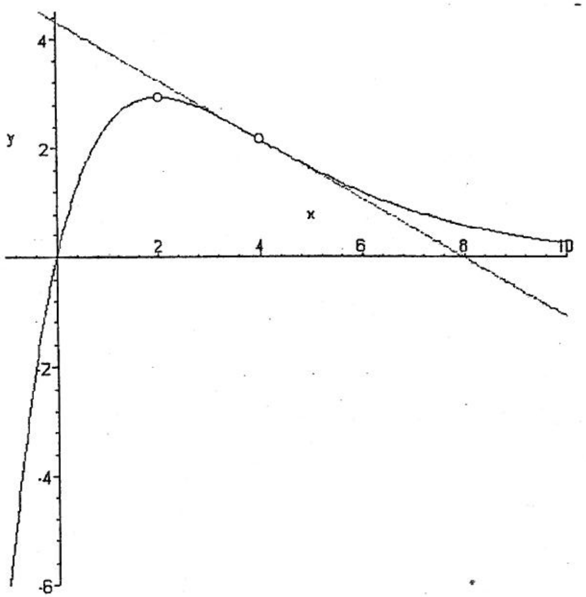
keine vertikalen oder schiefen Tangenten

Hoch- und Tiefpunkte :

$f'(x) = 4 \cdot e^{-\frac{1}{2}x} + 4 \cdot x \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot e^{-\frac{1}{2}x} = (1 - \frac{1}{2} \cdot x) \cdot 4 \cdot e^{-\frac{1}{2}x} = (4 - 2 \cdot x) \cdot e^{-\frac{1}{2}x} = -2 \cdot (x-2) \cdot e^{-\frac{1}{2}x}$

$f'(x) = 0$ für $4 - 2 \cdot x = 0 \Rightarrow x = 2$ (einzige Nullstelle der 1.Ableitung) mit

$f(x) = \frac{8}{e} = 2{,}94...$



b) $f''(x) = (-2) \cdot e^{-\frac{1}{2}x} + (4 - 2 \cdot x) \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot e^{-\frac{1}{2}x} = (-4 + x) \cdot e^{-\frac{1}{2}x}$

$f''(2) = -\frac{2}{e} < 0$; bei $x = 2$ ist ein Hochpunkt vorhanden

$f''(x) = 0$ für $x = 4$; Nullstelle der 2.Ableitung rechts vom Hochpunkt $H\left(2 \mid \frac{8}{e}\right) \approx$

$H(2 \mid 2{,}94)$ mit x-Achse als horizontaler Asymptote erzwingt Wendepunkt bei $x = 4$;

Wendepunkt $W\left(4 \mid \frac{16}{e^2}\right) \approx W(4 \mid 2.16)$.

Wendetangente : Ansatz $y = m \cdot x + q$ mit $m = f'(4) = -\frac{4}{e^2} \approx -0{,}54$

Koordinaten des Wendepunkts einsetzen:

$\frac{16}{e^2} = -\frac{4}{e^2} \cdot 4 + q \Rightarrow q = \frac{32}{e^2} \approx 4{,}33$

Tangentengleichung : $y = -\frac{4}{e^2} \cdot x + \frac{32}{e^2} \approx -0{,}54\,x + 4{,}33$

[oder : $f'''(x) = -\frac{1}{2} \cdot (x - 6) \cdot e^{-\frac{1}{2}x}$ bestimmen, $f'''(4) = \frac{1}{e^2} \neq 0$]

Winkel : $\tan \alpha = \frac{1}{m} = -\frac{e^2}{4} \Rightarrow \alpha = 61{,}57...$

c) $F'(x) = -8 \cdot e^{-\frac{1}{2}x} + (-8) \cdot (x+2) \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot e^{-\frac{1}{2}x} = 4 \cdot x \cdot e^{-\frac{1}{2}x}$

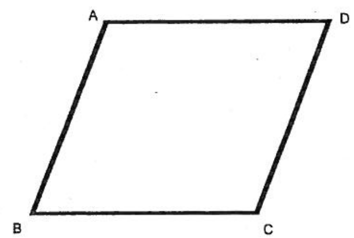
d) $A(a) = \int_0^a f(x)dx = \left[(-8) \cdot (x+2) \cdot e^{-\frac{1}{2}x}\right]_0^a = (-8) \cdot (a+2) \cdot e^{\frac{a}{2}} - (-8) \cdot (0+2) \cdot e^0 =$

$= (-8) \cdot (a+2) \cdot e^{-\frac{a}{2}} + 16$

$\lim\limits_{a \to \infty} A(a) = 16$

Lösung der Aufgabe 2:

a) $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}, \vec{AC} = \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$



Parametergleichung :

$\vec{r} = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{rcrcrcr|cc} x & = & -2 & + & 7u & + & 2v & \cdot 1 & \cdot 1 \\ y & = & 7 & - & 4u & - & 2v & \cdot 1 & \\ z & = & & - & 4u & + & v & & \cdot(-2) \end{array} \quad +$$

$$\begin{array}{rcrcl} x + y & = & 5 & + & 3u \\ x - 2z & = & -2 & + & 15u \end{array}$$

E : $4x + 5y + 2z = 27$

b) $\overline{AB} = 9$; $\vec{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$; $\overline{BC} = 9$, $\overline{AC} = 12$; AC ist die längere Seite

c) $\overline{CD} = \overline{DA} = 9$

$\vec{r}_D = \vec{r}_C + \vec{CD} = \vec{r}_C + \vec{BA} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$

D(-1 | 3 | 8)

Diagonalenschnittpunkt ist Mittelpunkt der Strecken AC und BD : M(2 | 3 | 2)

d) Der Normalenvektor zur Ebene E ist $\vec{n} = \begin{pmatrix}4\\5\\+2\end{pmatrix}$.

Die Normale n auf die Ebene durch S hat die Gleichung : $\vec{r} = \vec{r}_S + t\cdot\begin{pmatrix}4\\5\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\13\\6\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}4\\5\\2\end{pmatrix}$.

n schneiden mit der Ebene E : $4\cdot(10+4t) + 5\cdot(13+5t) + 2\cdot(6+2t) = 27$

$45t + 117 = 27$

$t = -2$

t = -2 eingesetzt : $\vec{r} = \begin{pmatrix}10\\13\\6\end{pmatrix} - 2\cdot\begin{pmatrix}4\\5\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix}$. Der Fusspunkt F des Lotes ist gleich dem Diagonalenschnittpunkt M, die Pyramide mit dem Rhombus als Grundfläche ist gerade.

e) Winkel α zwischen dem Vektor $\vec{AS} = \begin{pmatrix}12\\6\\6\end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ und dem Vektor $\vec{AC} = \begin{pmatrix}8\\-8\\4\end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$ mit dem

Skalarprodukt : $\cos\alpha = \dfrac{\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{9}} = \dfrac{4-2+1}{3\sqrt{6}} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$; $\alpha = 65°905..$

f) Höhe $h = \overline{SF} = \left|\begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}10\\13\\6\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}-8\\-10\\-4\end{pmatrix}\right| = \sqrt{180} = 6\cdot\sqrt{5}$

Grundfläche G des Rhombus : $G = \overline{BC}\cdot\overline{BA}\cdot\sin\beta = 9\cdot 9\cdot\sin\beta$

Der Winkel zwischen BC und AC ergibt sich mit dem Skalarprodukt :

$\cos\beta = \dfrac{\begin{pmatrix}-7\\4\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-4\\8\end{pmatrix}}{9\cdot 9} = \dfrac{-7-16+32}{81} = \dfrac{9}{81} = \dfrac{1}{9}$ $\Rightarrow$ $\beta = 83°6206...$

$G = 81\cdot\sin 83{,}6206... = 8{,}4988..$

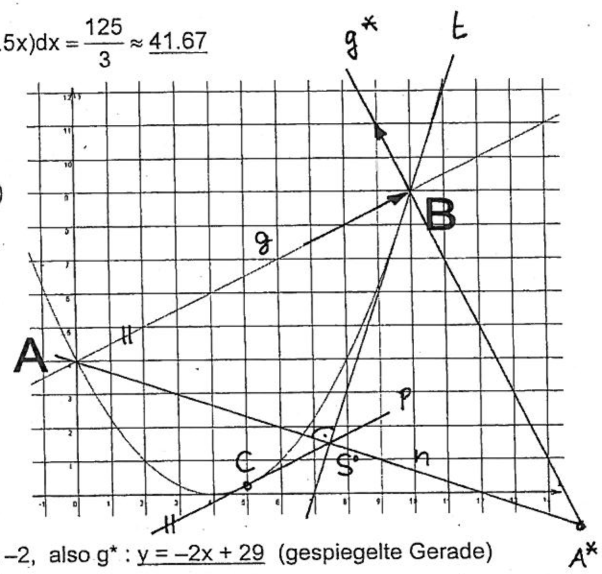
[alternative Lösung $\left|\vec{BA}\times\vec{BC}\right| = \left|\begin{pmatrix}48\\60\\24\end{pmatrix}\right| = 36\cdot\sqrt{5}$]

$V = \dfrac{G\cdot h}{3} = 360$

Lösung 3

A(0/4) , B(10/9) g = (AB) : y = 0.5x + 4

a) $F = \int_0^{10}(g(x)-p(x))dx = \int_0^{10}(-0.25x^2+2.5x)dx = \dfrac{125}{3} \approx \underline{41.67}$



b) $V = \pi\int_0^{10}\frac{1}{4}(x^2+16x+64)dx =$

$= \dfrac{\pi}{3}1330 \approx \underline{1392.77}$ (Kegelstumpf)

c) Eine Parallele p || g mit Steigung 0.5 muss Tangente in C sein.

$p'(x_0) = 0.5\,x_0 - 2 = 0.5$

$\Rightarrow x_0 = 5$ $\Rightarrow$ C (5 / 0.25)

d) p'(10) = 3

Tangente in B : t : y = 3x – 21

A an t spiegeln ⇒ A*

Normale n ⊥ t durch A :

$n : y = -\frac{1}{3}x + 4$

$n \cap t \Rightarrow S(7.5/1.5)$

A* (15/–1), Steigung von (BA*) ist –2, also g* : y = –2x + 29 (gespiegelte Gerade)

Variante : ∡(g,t) = 45°. Dann ist auch ∡(g*,t) = 45°. Also steht g* normal auf g.

S(0/29) : Schnittpunkt mit der y-Achse

4. a.) $P_{(1 \text{ rot unter } 12)} = \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{11} \cdot 12 = 0.046 = 4.6\%$

b.) $P_{(\text{mind. } 2 \text{ gelbe unter } 12)} = 1 - P_{(0 \text{ gelbe})} - P_{(1 \text{ gelbe})}$

$$= 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{12} - \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{11} \cdot 12 = 0.946 = 94.6\%$$

c.) $P_{(\text{von jeder Sorte } 4 \text{ unter } 12)} = \left(\frac{1}{3}\right)^{12} \cdot \frac{12!}{4!\,4!\,4!} = 0.065 = 6.5\%$

d.) $\binom{8}{3} \cdot \binom{12}{7} = 56 \cdot 792 = 44\,352$

e.) $P_{(\text{mind. } 1 \text{ Zwiebel unter } n)} = 1 - P_{(\text{keine Zwiebel unter } n)}$

$$= 1 - 0.3^n$$

$$1 - 0.3^n \geq 0.99$$

$$0.01 \geq 0.3^n$$

$$\frac{\lg 0.01}{\lg 0.3} \leq n$$

$$3.82 \leq n$$

Man muss mind. 4 Zwiebeln pflanzen.

f.)

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	$(0.3)^5$	$(0.3)^4 \cdot 0.7 \cdot 5$	$(0.3)^3 (0.7)^2 \binom{5}{2}$	$(0.3)^2 (0.7)^3 \binom{5}{3}$	$0.3 \cdot (0.7)^4 \cdot 5$	$(0.7)^5$
	$=0.00243$	$=0.02835$	$=0.1323$	$=0.3087$	$=0.36015$	$=0.16807$

$$E(x) = 5 \cdot 0.7 = 3.5$$

$$\sigma = \sqrt{5 \cdot 0.7 \cdot 0.3} = 1.025$$

5. a.) $2 - \frac{1}{x} + x - \frac{1}{x^2} + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{x^3} + \dots - \dots +$

$$= \underbrace{2 + x + \frac{x^2}{2} + \dots}_{} - \underbrace{\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \dots\right)}_{}$$

$$= \frac{2}{1 - \frac{x}{2}} - \frac{\frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = 6$$

$$2\left(1 - \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\left(1 - \frac{x}{2}\right) = 6\left(1 - \frac{1}{x}\right)\left(1 - \frac{x}{2}\right)$$

$$2 - \frac{2}{x} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} = 6 - \frac{6}{x} - 3x + 3$$

$$3x + \frac{3}{x} - 6.5 = 0$$

$$3x^2 - 6.5x + 3 = 0$$

$x_1 = \frac{3}{2}$ $\qquad x_2 = \frac{2}{3} \Rightarrow$ keine Konvergenz

$$\boxed{x = \frac{3}{2}}$$

Aufgabe 5b:

M(2/1) ist Mittelpunkt von k. $M_{Th}(-0.5/6)$ ist Mittelpunkt des Thaleskreises k_{Th} über MP.
Also k_{Th}: $(x + 0.5)^2 + (y - 6)^2 = 2.5^2 + 5^2$ (oder k_{Th} auch über Skalarprodukt)

k: $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 20$
k_{Th}: $x^2 + y^2 + x - 12y = -5$

Subtraktion der Gleichungen liefert $-5x + 10y = 25$, also $x = 2y - 5$

eingesetzt in Gleichung von k: $(2y - 7)^2 + (y - 1)^2 = 25$

Es folgt $y^2 - 6y + 5 = (y - 1)(y - 5) = 0$, daher die Berührpunkte $B_1(-3/1)$ und $B_2(5/5)$.
Da B_1 und P dieselben Abszissen haben, so gilt für dieTangente $\mathbf{t_1: x = -3}$

Aus P und B_2 berechnet sich die Steigung von t_2 zu $m = -0.75$.
Einsetzen der Koordinaten von B_2 in Ansatz t_2: $y = -0.75x + q$ ergibt $q = 8.75$

Also Tangente $\mathbf{t_2: 3x + 4y - 35 = 0}$