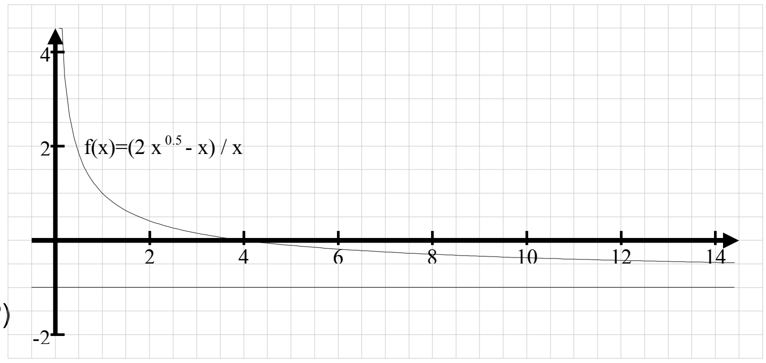
M a t h e m a t i k Grundlagen Lösungen

Lösung der Aufgabe 1:

a) <u>Nullstelle:</u> $2\sqrt{x_0} - x_0 = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x_0} = x_0 \Leftrightarrow 2 = \sqrt{x_0}$, da $x_0 > 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x_0 = 4}}$

<u>Asymptoten:</u> senkrechte Asymptote bei $\underline{\underline{x = 0}}$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2\sqrt{x} - x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} (\frac{2}{\sqrt{x}} - 1) = -1 \Rightarrow$ horizontale Asymptote $\underline{\underline{y = -1}}$



(2P)

b) $\underline{\underline{A(p)}} = \int_p^4 f(x)dx = \int_p^4 \frac{2\sqrt{x} - x}{x} dx = \int_p^4 (\frac{2}{\sqrt{x}} - 1)dx = \int_p^4 (2x^{-\frac{1}{2}} - 1)dx = [4x^{\frac{1}{2}} - x]_p^4 = [4\sqrt{x} - x]_p^4$

$= 4 \cdot 2 - 4 - (4\sqrt{p} - p) = \underline{\underline{4 - 4\sqrt{p} + p}} \Rightarrow \underline{\underline{\lim\limits_{p\to 0} A(p)}} = \lim\limits_{p\to 0}(4 - 4\sqrt{p} + p) = \underline{\underline{4}}$ (3P)

c) <u>Zielfunktion:</u> Flächeninhalt von R: $F(x, y) = x \cdot y$

<u>Nebenbedingung:</u> $y = f(x) = \frac{2\sqrt{x} - x}{x} \Rightarrow F(x) = x \cdot \frac{2\sqrt{x} - x}{x} = 2\sqrt{x} - x$, ID =]0,4]

<u>Lokale Maxima:</u> $F'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow x = 1$

$F''(x) = (\frac{1}{\sqrt{x}} - 1)' = (x^{-\frac{1}{2}} - 1)' = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}} \Rightarrow F''(1) = -\frac{1}{2} < 0 \Rightarrow x = 1$ lokales Maximum

<u>Ränder von ID:</u> $\lim\limits_{x\to 0} F(x) = \lim\limits_{x\to 0}(2\sqrt{x} - x) = 0$, $F(4) = 2\sqrt{4} - 4 = 0$, $F(1) = 2\sqrt{1} - 1 = 1$

$\Rightarrow x = 1$ globales Maximum

$y = f(1) = \frac{2\sqrt{1} - 1}{1} = 1 \Rightarrow$ Beim Punkt $\underline{\underline{P(1|1)}}$ ist der Flächeninhalt von R am grössten. (3P)

d) $\underline{\underline{V}} = \pi \cdot \int_4^9 f(x)^2 dx = \pi \cdot \int_4^9 (\frac{2\sqrt{x} - x}{x})^2 dx = \pi \cdot \int_4^9 (\frac{2}{\sqrt{x}} - 1)^2 dx = \pi \cdot \int_4^9 (\frac{4}{x} - \frac{4}{\sqrt{x}} + 1)dx = \pi \cdot \int_4^9 (\frac{4}{x} - 4x^{-\frac{1}{2}} + 1)dx =$

$= \pi \cdot [4 \cdot \ln x - 8x^{\frac{1}{2}} + x]_4^9 = \pi \cdot [4 \cdot \ln 9 - 8\sqrt{9} + 9 - (4 \cdot \ln 4 - 8\sqrt{4} + 4)] = \pi \cdot [4 \cdot (\ln 9 - \ln 4) - 3] = \underline{\underline{0.765...}}$ (2P)

Lösung der Aufgabe 2:

a) $\overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} -1-(-2) \\ 3-5 \\ -5-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -11 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -10 \end{pmatrix}$,

$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$, also $\underline{\underline{F(4|4|-10)}}$ und $\underline{\underline{G(2|0|-8)}}$ (2P)

b) Parametergleichung von ε:

$\underline{\underline{\vec{r}}} = \overrightarrow{OA} + u\overrightarrow{AB} + v\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 3-(-2) \\ 6-5 \\ 1-6 \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} 1-(-2) \\ 2-5 \\ 3-6 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}}}$

Koordinatengleichung von ε:

$\left| \begin{array}{l} x = -2 + 5u + 3v \\ y = 5 + u - 3v \\ z = 6 - 5u - 3v \end{array} \right| \begin{array}{l} \cdot 1 \\ \\ \cdot 1 \end{array} \Rightarrow x + z = 4 \Rightarrow \underline{\underline{x + z - 4 = 0}}$ (2P)

c) $\cos(\phi) = \dfrac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AE}}{\overline{AC} \cdot \overline{AE}} = \dfrac{\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -11 \end{pmatrix}}{\sqrt{3^2 + (-3)^2 + (-3)^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-11)^2}} = \dfrac{3 + 6 + 33}{3\sqrt{3} \cdot \sqrt{126}} = \dfrac{42}{9\sqrt{42}} = \dfrac{\sqrt{42}}{9} = 0.720...$

$\Rightarrow \underline{\underline{\phi = 43.938...^\circ}}$ (1P)

d) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 1-3 \\ 2-6 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ Es gilt $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = -6 + 12 - 6 = 0$. Also steht AC rechtwinklig zu BC und der rechte Winkel ist bei C. (1P)

e) Normale n zu ε durch E:

$\varepsilon : x + z - 4 = 0 \Rightarrow \vec{n}_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ Richtungsvektor von n $\Rightarrow$ $n : \vec{r} = \overrightarrow{OE} + t\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\underline{n \cap \varepsilon}$: $(-1 + t) + (-5 + t) - 4 = 0 \Rightarrow 2t = 10 \Rightarrow t = 5 \Rightarrow n : \vec{r}_H = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{H(4\,|\,3\,|\,0)}}$

$\underline{\underline{h = \overline{HE}}} = \sqrt{(-1-4)^2 + (3-3)^2 + (-5-0)^2} = \sqrt{50} \underline{\underline{= 5\sqrt{2} \approx 7.07}}$ (2P)

f) $\underline{\underline{F_{ABC}}} = \dfrac{1}{2}\overline{AC} \cdot \overline{BC} = \dfrac{1}{2}3\sqrt{3} \cdot \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2 + 2^2} = \dfrac{3}{2}\sqrt{3}\sqrt{24} \underline{\underline{= 9\sqrt{2} = 12.727...}}$

$\underline{\underline{V_{ABCEFG}}} = G \cdot h = F_{ABC} \cdot \overline{FS} = \cdot 9\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2} \underline{\underline{= 90}}$ (2P)

Lösung der Aufgabe 3:

a) P (3mal positiv) = 0.5^3 = <u>0.125</u> (1P)

b) Summe $\geq$ 16 : +6+6+6 , +6+6+4 , +6+4+6 , +4+6+6 . (1P)

P (mindestens Summe 16) = $\frac{4}{6^3} = \frac{1}{54}$ = <u>0.0185...</u>

c) Summe = 0 : +6 –5 –1 (in jeder Reihenfolge, 6mal) (2P)

+6 –3 –3 (3mal)

+4 –3 –1 (6mal)

+2 –1 –1 (3mal) $\rightarrow$ total 18 günstige Ereignisse, bzw. Pfade im Baum

P (Summe 0) = $\frac{18}{216} = \frac{1}{12}$

d) Binomialverteilung mit n = 10 und p = 0.5 X = Anzahl positiver Zahlen (2P)

P (X $\geq$ 2) = 1 – P (X=0) – P (X=1) = $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10} - 10\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1013}{1024}$ = <u>0.989...</u>

e) P (rot) = $\frac{1}{3}$ (2P)

P (mindestens 1mal rot in n Würfen) = 1 – P (keinmal rot) = $1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \geq 0.99$

$\Rightarrow 0.01 \geq \left(\frac{2}{3}\right)^n \Rightarrow n \geq 11.357...$ Man muss <u>mindestens 12mal</u> werfen.

f) Verteilung: (2P)

P (3mal positiv) = $\frac{1}{8}$ $\rightarrow$ 9 Franken Auszahlung

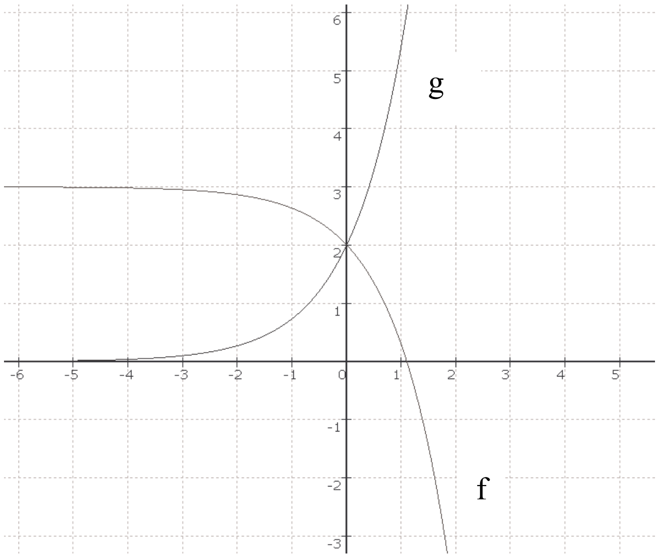
P (2mal positiv) = $\frac{3}{8}$ $\rightarrow$ 6 Franken Auszahlung

P (1mal positiv) = $\frac{3}{8}$ $\rightarrow$ 3 Franken Auszahlung

Erwartete Auszahlung E = $\frac{1\cdot 9 + 3\cdot 6 + 3\cdot 3}{8} = \frac{36}{8}$ = 4.5 (Franken)

Es muss mit einem <u>Verlust von 0.5 Franken</u> gerechnet werden.

Lösung der Aufgabe 4:



a) Vergleiche Abbildung ! (2P)

b) $2e^x = -e^x + 3 \quad \Big| +e^x$

$3e^x = 3 \quad \Big| :3 \quad \Rightarrow \underline{S(0|2)}$ (2P)

$e^x = 1 \ \Rightarrow \ x = 0$

Nullstelle:

$-e^x + 3 = 0 \ \Rightarrow \ e^x = 3$ | ln

$\underline{x_0 = \ln 3}$ = 1.098...

c) $A = \lim\limits_{b\to-\infty}\int_b^0 2e^x dx + \int_0^{\ln 3}(-e^x + 3)dx$ (3P)

$\int_b^0 2e^x dx = \left[2e^x\right]_b^0 = 2e^0 - 2e^b = 2 - 2e^b \ \Rightarrow \ \lim\limits_{b\to-\infty}(2 - 2\cdot e^b) = 2$

$\int_0^{\ln 3}(-e^x + 3)dx = \left[-e^x + 3x\right]_0^{\ln 3} = (-e^{\ln 3} + 3\cdot\ln 3) - (-e^0 + 0) = -3 + 3\cdot\ln 3 + 1 = 3\cdot\ln 3 - 2$

$A_{Total} = 2 + 3\cdot\ln 3 - 2 = \underline{3\cdot\ln 3}$ = 3.295...

d) $g: y = 2\cdot e^{tx} \ \Rightarrow \ P(0\,|\,2)$ (3P)

Tangente: $g'(x) = 2\cdot t\cdot e^{t\cdot x} \Rightarrow g'(0) = 2t = m_t \ \Rightarrow \ \underline{t: y = 2t\cdot x + 2}$, weil q = f(0) = 2

Normale: $m_t\cdot m_n = -1 \ \Rightarrow \ m_n = -\frac{1}{2t} \ \Rightarrow \ \underline{n: y = -\frac{1}{2t}\cdot x + 2}$

Nullstelle der Tangente: $2\cdot t\cdot x + 2 = 0 \ \Rightarrow \ x_1 = -\frac{1}{t}$

Nullstelle der Normalen: $-\frac{1}{2t}x + 2 = 0 \ \Rightarrow \ x_2 = 4t$

$A_\Delta(t) = \frac{(x_2 - x_1)\cdot 2}{2} = \frac{\left(4t - (-\frac{1}{t})\right)\cdot 2}{2} = \underline{4t + \frac{1}{t}}$

Lösung der Kurzaufgaben:

a) Gerade g=(PQ):

$$m_g = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3-4}{6-2} = -\frac{1}{4} \Rightarrow g: y = -\frac{1}{4}x + b \overset{P(2|4)}{\Rightarrow} 4 = -\frac{1}{4}\cdot 2 + b \Rightarrow b = \frac{9}{2} \Rightarrow g: y = -\frac{1}{4}x + \frac{9}{2}$$

Normale n zu t durch B:

$$B(-10|y_B) \in t \Rightarrow y_B = -2\cdot(-10) - 19 = 1 \Rightarrow B(-10|1)$$

$$m_n = -\frac{1}{m_t} = \frac{1}{2} \Rightarrow n: y = \frac{1}{2}x + b \overset{B(-10|1)}{\Rightarrow} 1 = \frac{1}{2}\cdot(-10) + b \Rightarrow b = 6 \Rightarrow n: y = \frac{1}{2}x + 6$$

$n \cap g$: $\frac{1}{2}x + 6 = -\frac{1}{4}x + \frac{9}{2} \Leftrightarrow 2x + 24 = -x + 18 \Leftrightarrow 3x = -6 \Leftrightarrow x = -2 \overset{n:}{\Rightarrow} y = \frac{1}{2}\cdot(-2) + 6 = 5 \Rightarrow M(-2\,|\,5)$

Radius: $r = \overline{MB} = \sqrt{(-10-(-2))^2 + (1-5)^2} = \sqrt{64+16} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5} = 8.944...$

Gleichung von k: $\underline{\underline{k: (x+2)^2 + (y-5)^2 = 80}}$ (5P)

b) $\underline{\underline{s(0.4)}} = \sum_{i=1}^{\infty} 2\cdot 0.4^{i-1} = 2\cdot\frac{1}{1-0.4} = \frac{2}{0.6} = \underline{\underline{\frac{10}{3}}}$, da $q = 0.4 < 1$

$$s_n(0.4) = 2\cdot\frac{1-0.4^n}{1-0.4} = \frac{2}{0.6}\cdot(1-0.4^n) = \frac{10}{3}\cdot(1-0.4^n)$$

$$s(0.4) - s_n(0.4) \le 0.000000001\cdot s(0.4) \Rightarrow (1-0.000000001)\cdot s(0.4) \le s_n(0.4)$$

$$\Rightarrow 0.999999999\cdot\frac{10}{3} \le \frac{10}{3}\cdot(1-0.4^n) \Rightarrow 0.999999999 \le 1-0.4^n$$

$$\Rightarrow 0.4^n \le 1-0.999999999 = 0.000000001 \quad |\ln \Rightarrow n\cdot\ln(0.4) \le \ln(0.000000001) \qquad |:\ln(0.4) < 0$$

$$\Rightarrow n \ge \frac{\ln(0.000000001)}{\ln(0.4)} = 22.616... \Rightarrow \underline{\underline{n = 23}}$$ (5P)