

Lösung der Aufgabe 1

a) $r \cdot p = \frac{h}{2\pi}$, also $p = \frac{h}{2\pi \cdot r}$;
 $E_{\text{kin}} = \frac{mv^2}{2} = \frac{(mv)^2}{2m} = \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2m} \cdot \left(\frac{h}{2\pi \cdot r}\right)^2 = \frac{h^2}{8\pi^2 m \cdot r^2}$ und $m = m_e$

b) $E(r) = E_{\text{kin}} - E_{\text{pot}} = \frac{h^2}{8\pi^2 m_e r^2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r}$
 $\frac{dE}{dr} = \frac{h^2}{8\pi^2 m_e} \cdot \left(-\frac{2}{r^3}\right) - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(-\frac{1}{r^2}\right) = \frac{-2h^2\epsilon_0 + e^2\pi \cdot m_e \cdot r}{8\pi^2 m_e r^3 \epsilon_0}$
 $\frac{dE}{dr} = 0 : -2h^2\epsilon_0 + e^2 \cdot 2\pi m_e r = 0$
 $\Rightarrow r = r_0 = \frac{h^2}{\pi m_e e^2} = \frac{(6,626 \cdot 10^{-34})^2 \cdot 8,854 \cdot 10^{-12}}{\pi \cdot 9,109 \cdot 10^{-31} \cdot (1,602 \cdot 10^{-19})^2} = 5,293 \cdot 10^{-11} \text{ m}$

$E(r_0) = -2,179 \cdot 10^{-18} \text{ J} = E_0$

c) $r_1 = r_0 - 0,035 \cdot r_0 = 0,965 \cdot r_0 = 5,108 \cdot 10^{-11} \text{ m}$

$E(r_1) = -2,176 \cdot 10^{-18} \text{ J} = E_1$ $\Delta E = E_1 - E_0 = 3 \cdot 10^{-21} \text{ J}$

$\Delta E_{\text{ges}} = N_A \cdot \Delta E = 6 \cdot 10^{26} \cdot 3 \cdot 10^{-21} = 1,8 \cdot 10^6 \text{ m}^3$

$V_0 = N_A \cdot \frac{4}{3} \pi r_0^3 = 3,74 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$

$\Delta V = 0,1 V_0 = 3,74 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3$

$\Delta E = \bar{p} \cdot \Delta V$ $\bar{p} = \frac{\Delta E}{\Delta V} = 4,8 \cdot 10^{10} \text{ Pa} = 0,48 \text{ Mbar}$

Lösung der Aufgabe 2 :

$$\text{a) } P = \frac{U^2}{R}, R_B = \frac{U^2}{P} = \frac{230^2}{100} \Omega = 529 \Omega = R_{3000^\circ}$$

$$J_B = \frac{U}{R_B} = 0,435 \text{ A}$$

$$R = \rho \cdot \frac{\ell}{A} \text{ mit } \rho_{\text{Wolfram}20} = 5,3 \cdot 10^{-8} \text{ und } \rho_{\text{Wolfram}3000} = 113 \cdot 10^{-8} \text{ (FoSa S.177)}$$

$$\text{also folgt } \frac{R_E}{R_B} = \frac{5,3 \cdot 10^{-8}}{113 \cdot 10^{-8}} = 0,0469\dots; R_E = 0,0469 \cdot 529 \Omega = 24,81\dots \Omega$$

$$J_E = \frac{U}{R_E} = 9,27 \text{ A} \quad \text{Einschaltstrom}$$

$$\text{b) } P = A \sigma T^4 \text{ (Stefan-Boltzmann)}$$

$$A = \frac{P}{\sigma T^4} = \frac{100}{5,67 \cdot 10^{-8} \cdot 0,3273^4} \text{ m}^2 = 1,54 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 = 15,4 \text{ mm}^2$$

$$\text{c) wegen } 2\pi R \ell = A \quad \text{und} \quad \frac{\rho \ell}{r^2 \pi} = R \quad \text{ist} \quad \frac{2\pi r}{A} = \frac{R r^2 \pi}{\rho} \quad \text{und damit}$$

$$r^3 = \frac{A \rho}{2R \pi^2} = \frac{1,54 \cdot 10^{-5} \cdot 113 \cdot 10^{-8}}{2 \cdot 529 \cdot \pi^2}, \quad r = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ m} = 0,012 \text{ mm}; \quad \ell = \frac{A}{2\pi r} = 0,21 \text{ m}$$

$$\text{d) } U = 12 \text{ V}; \quad R_B = \frac{U^2}{P} = 1,44 \Omega; \quad A = 1,54 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2$$

$$\text{wie in c) } r^3 = \frac{1,54 \cdot 10^{-5} \cdot 113 \cdot 10^{-8}}{2 \cdot 1,44 \pi^2}; \quad r = 8,5 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

$$\ell = \frac{A}{2\pi r} = \frac{1,54 \cdot 10^{-5}}{2\pi \cdot 8,5 \cdot 10^{-5}} \text{ m} = 0,029 \text{ m} = 2,9 \text{ cm}$$

Lösung der Aufgabe 3 :

a) Affinitätsrichtung ist $\vec{PP}' = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -12 \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Abbildungsgleichungen $x' = a_1x + b_1y + c_1$
 $y' = a_2x + b_2y + c_2$

Da der Ursprung auf der Affinitätsachse liegt, ist die Abbildung Ursprungsabbildung, d.h. $c_1 = c_2 = 0$.

Abbildung des Punktes (0/6) : $-4 = 6b_1 \quad - \quad b_1 = -\frac{2}{3}$
 $-6 = 6b_2 \quad - \quad b_2 = -1$

Die Gleichungen $x = a_1x - \frac{2}{3}y \Leftrightarrow (a_1 - 1)x - \frac{2}{3}y = 0$ (Fixpunktbedingung)
 $y = a_2x - y \quad a_2x - 2y = 0$

ergeben beide die Gleichung der Fixpunktgeraden $x + 2y = 0$, also ist $a_2 = -1$ und

$a_1 = \frac{2}{3}$.

Die Abbildungsgleichungen lauten $x' = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y$
 $y' = -x - y$

Umkehrabbildungen : aus $\frac{3}{2}x' = x - y$ und $y' = -x - y$ folgt $\begin{cases} x = \frac{3}{4}x' - \frac{1}{2}y' \\ y = -\frac{3}{4}x' - \frac{1}{2}y' \end{cases}$

Einsetzen in die Gleichung des Kreises : $(\frac{3}{4}x' - \frac{1}{2}y')^2 + (-\frac{3}{4}x' - \frac{1}{2}y')^2 = 9$

Man erhält $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{18} = 1$, also eine Ellipse mit dem Mittelpunkt (0|0) den Halbachsen $a = 2 \cdot \sqrt{2}$
 und $b = 3 \cdot \sqrt{2}$.

b) $x^2y' + 2xy = 0$ (homogene Gleichung)

$y' = -\frac{2y}{x}$, also $\frac{dy}{y} = -\frac{2}{x}$

Die Integration ergibt : $\ln|y| = -2 \cdot \ln|x| + c = \ln|\frac{1}{x^2}| + \ln k = \ln \frac{k}{x^2}$ also $y = \frac{k}{x^2}$

$y' = -\frac{2y}{x} - \frac{4}{x^2}$ (inhomogene Gleichung)

Man erhält als Tabelle für die Steigungen in den Gitternetzpunkten :

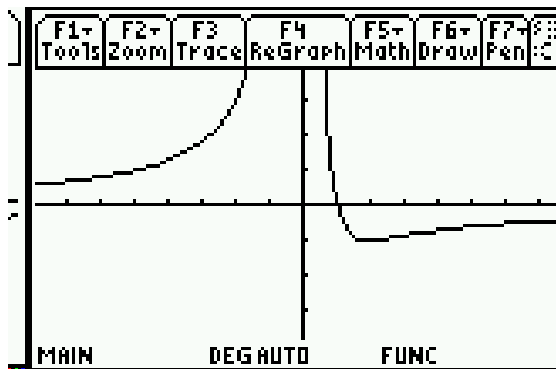
y\x	0	1	2	3	4
-3	-	2	2	1.55	1.25
-2	-	0	1	0.88	0.75
-1	-	-2	0	0.22	0.25
0	-	-4	-1	-0.4	-0.3
1	-	-6	-2	-1.1	-0.8
2	-	-8	-3	-1.8	-1.3
3	-	-10	-4	-2.4	-1.8

Das CAS des TI-89 liefert als Lösung

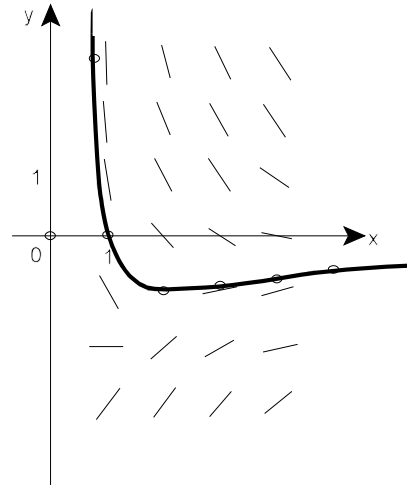
die Funktion mit der Gleichung

$$y = \frac{\text{const}}{x^2} - \frac{4}{x}$$

Graph (TI-89) :



Richtungsfeld :



Lösung der Aufgabe 4 :

a) Definitionsbereich $D = \mathbb{C} \setminus \{1\}$

Fixpunkte : $z = \frac{z+1}{z-1} \Rightarrow z^2 - z = z + 1 \Rightarrow z^2 - 2z - 1 = 0$

Lösungen der Gleichung durch quadratisches Ergänzen :

$$z^2 - 2z + 1 = 2$$

$$(z-1)^2 = 2 \text{ cis } 0^\circ$$

$$z - 1 = \sqrt{2} \text{ cis } 0^\circ \quad \text{also } z_1 = \sqrt{2} + 1$$

$$\text{und } z - 1 = \sqrt{2} \text{ cis } 180^\circ \quad \text{also } z_2 = -\sqrt{2} + 1$$

Umkehrfunktion $w = \frac{z+1}{z-1}$

$$(z-1) \cdot w = z+1$$

$$z \cdot w - z = w + 1$$

$$z \cdot (w-1) = w+1$$

$$z = \frac{w+1}{w-1}$$

Die Gleichung der Umkehrfunktion hat dieselbe algebraische Form wie die Ausgangsfunktion.

b) Reelle Achse der z-Ebene : $z - \bar{z} = 0$; Umkehrabbildung eingesetzt :

$$\frac{w+1}{w-1} - \frac{\bar{w}+1}{\bar{w}-1} = 0$$

$$(w+1) \cdot (\bar{w}-1) - (\bar{w}+1) \cdot (w-1) = 0$$

$$w\bar{w} - w + \bar{w} - 1 - w\bar{w} + \bar{w} - w + 1 = 0$$

$$2(\bar{w} - w) = 0$$

$$\bar{w} - w = 0 \quad \underline{\text{Reelle Achse der } w\text{-Ebene}}$$

Die reelle Achse ist keine Fixpunktgerade, z.B. wird der Punkt $z = 2$ auf den Punkt $w = 3$ abgebildet ? (Es gibt nur zwei Fixpunkte).

Imaginäre Achse der z -Ebene : $z + \bar{z} = 0$; Umkehrabbildung eingesetzt :

$$\frac{w+1}{w-1} + \frac{\bar{w}+1}{\bar{w}-1} = 0$$

$$(w+1) \cdot (\bar{w}-1) + (\bar{w}+1) \cdot (w-1) = 0$$

$$w\bar{w} - w + \bar{w} - 1 + w\bar{w} - \bar{w} + w - 1 = 0$$

$$2w\bar{w} = 2$$

$$w\bar{w} = 1 \quad \underline{\text{Einheitskreis der } w\text{-Ebene}}$$

c) $z_0 = 0 \quad w_0 = \frac{0+1}{0-1} = -1$

$z_1 = i \quad w_1 = \frac{i+1}{i-1} = \frac{(i+1)^2}{i^2-1} = -\frac{1}{2} \cdot 2i = -i$

$z_2 = 2 \cdot i \quad w_2 = \frac{2i+1}{2i-1} = \frac{-4+4i+1}{-4-1} = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$

$z_3 = 3 \cdot i \quad w_3 = \frac{3i+1}{3i-1} = \frac{-9+6i+1}{-9-1} = \frac{4}{5} - \frac{3}{5}i$

$z_n = n \cdot i \quad w_n = \frac{ni+1}{ni-1} = \frac{(1-n^2)+2n \cdot i}{-n^2-1}$

d) Es ist $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-n^2+2ni}{-n^2-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2} - 1 + \frac{2i}{n}}{-1 - \frac{1}{n^2}} = 1$

Die positive imaginäre Achse wird also auf den Halbkreis unterhalb der reellen Achse der w -Ebene abgebildet.

- e) z-Ebene
positive imaginäre Achse
reelle Achse
 $r > 1$
 $0 \leq r < 1$
 $-1 \leq r < 0$
 $r < -1$

- w-Ebene
Einheits-Halbkreis unter der reellen Achse
reelle Achse
 $r > 1$
 $r \leq -1$
 $-1 < r \leq 0$
 $0 < r < 1$

Der Wert $z = 1 + i$ wird auf den Wert $w = 1 - 2 \cdot i$ abgebildet.
Der erste Quadrant der z-Ebene wird als auf die unter der reellen Achse der w-Ebene liegende Halbebene abgebildet, ausgenommen die Werte im Einheitskreis der w-Ebene.

