

Schwerpunktfach
Physik und Anwendungen der Mathematik

Bemerkungen:

Zeit: 3 Stunden

Punktzahl: Maximum = 60 Punkte, 48 Punkte = Note 6.

Erlaubte Hilfsmittel: DMK/DPK Formelsammlung, Taschenrechner TI89.

Verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt.

Alle verwendeten Symbole sind zu definieren (sofern nicht im Aufgabentext definiert).

Formeln, welche nicht der Formelsammlung entnommen werden, sind zu beweisen oder zu begründen.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!
--

Aufgabe 1: Differentialgleichung (10 Punkte)

Gegeben ist die Differentialgleichung $y' \sin x + y \cos x = \sin x$ (*)

- Wie lautet die Gleichung der Isoklinenschar? Bestimmen Sie speziell die Gleichungen der drei Isoklinen für die Steigungen 0, 0.5 und 2 der gesuchten Kurven und zeichnen Sie diese Isoklinen für den Definitionsbereich $]-\pi, \pi[$ in ein Koordinatensystem.
- Lösen Sie die dazugehörige homogene Differentialgleichung (TI89 nur zur Kontrolle).
- Finden Sie mit Hilfe der Variation der Konstanten eine partikuläre Lösung y_0 der inhomogenen Differentialgleichung (*) und geben Sie anschliessend die Lösungsgesamtheit von (*) an. Kontrollieren Sie mit dem TI89.
- Bestimmen Sie die Gleichung $y = f(x)$ derjenigen Lösungskurve G_f , die durch den Punkt $P(\frac{\pi}{2}/1)$ geht. Zeichnen Sie G_f mit Hilfe des TI89 in das Koordinatensystem bei a) ein. Diese Funktion f ist für $x = 0$ nicht definiert. Existiert dort die stetige Fortsetzung? Wenn ja, mit welchem Wert? Beweis!

{Wer Teilaufgabe c) nicht lösen kann, benützt zur Lösung von d) das Resultat des TI89 für die Lösungsgesamtheit von (*)}

Aufgabe 2: Komplexe Zahlen und Funktionen (10 Punkte)

Gegeben ist die komplexe Funktion $z \rightarrow w = f(z) = \frac{2z-i}{z}$

- Bestimmen Sie Definitionsmenge D und Wertemenge W von f .
- Welches ist das Bild k' des Kreises $k: |z| = 1$?
- Welches ist das Urbild h der imaginären Achse h' ?
- Bestimmen Sie die Gleichung des Bildes g' der Geraden $g: (1+i)z + (1-i)\bar{z} = 0$.
- Stellen Sie alle vorgekommenen Urbilder und Bilder in zwei Gauss-Ebenen dar. (Einheit = 2cm).
 G sei das Gebiet zwischen k und h . Wohin wird dieses Gebiet abgebildet ?

Aufgabe 3: Zwei unabhängige Teilaufgaben (je 5 Punkte)

- Berechnen Sie die Gleichung derjenigen Kurven, die **jede** Kurve mit Gleichung $x^2 + 4y^2 = a^2$ ($a \in \mathbb{R}$) rechtwinklig schneiden.
- Gegeben sind die affinen Abbildungen mit den Gleichungen

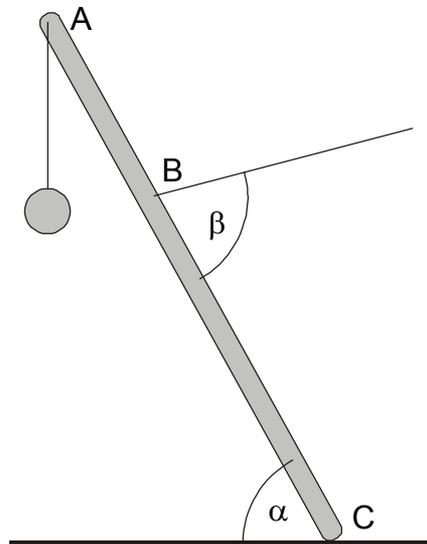
$$\begin{aligned}x' &= ax + (1 - a)y \\ y' &= (a - 1)x + by\end{aligned}$$

Für welche Werte von a und b sind die Abbildungen perspektiv-affin? Bestimmen Sie dann Affinitätsachse, - richtung und - verhältnis.

Aufgabe 4: Statik (8 Punkte)

Eine Stange der Masse 50kg und der Länge 3m wird an einem Seil aufgerichtet. Sie steht im Punkt C auf dem Boden. Das Seil ist im Punkt B im Abstand von 2m vom Punkt C fixiert. Am oberen Ende der Stange (Punkt A) hängt eine Lampe der Masse 20kg. Die beiden Winkel betragen $\alpha = 62^\circ$ und $\beta = 76^\circ$.

- Zeichnen Sie qualitativ sämtliche Kräfte ein, die auf die Stange wirken.
- Berechnen Sie den Betrag der Kraft, welche das Seil ausüben muss.
- Berechnen Sie Betrag *und* Richtung der Kraft, welche im Punkt C auf die Stange wirkt (zeichnen Sie den Winkel ein, den Sie berechnen).



Aufgabe 5: Differentialgleichungen (8 Punkte)

Für die volle Punktezahl ist in dieser Aufgabe eine detaillierte Darstellung des Lösungsweges erforderlich!

Ein Ball der Masse 500g wird mit einer Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 7.5\text{m/s}$ senkrecht nach oben abgeschossen. Es wirkt eine zur Geschwindigkeit proportionale Reibung: $\vec{F}_R = -k \cdot \vec{v}$ mit $k = 0.4\text{Ns/m}$.

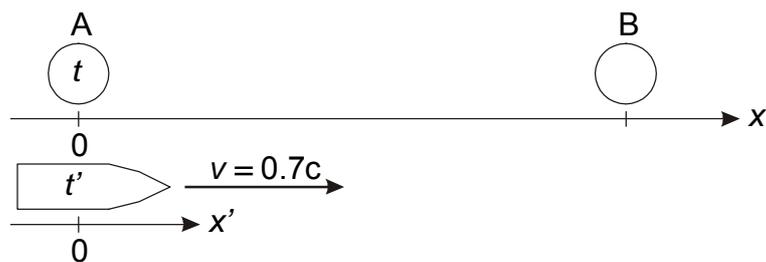
Berechnen Sie die Position s des Balles (in Bezug auf den Startort $s = 0\text{m}$) zum Zeitpunkt $t = 1.5\text{s}$ nach dem Start.

Aufgabe 6: Relativitätstheorie (8 Punkte)

Ein utopisches Raumschiff fliegt mit 70% der Lichtgeschwindigkeit an zwei Raumstationen A und B vorbei.

Wir definieren zwei Bezugssysteme: Im System S befinden sich die beiden Raumstationen in Ruhe, im System S' befindet sich das Raumschiff in Ruhe. Der Nullpunkt der beiden Systeme sei so gewählt, dass für den Vorbeiflug des Raumschiffes an Raumstation A („Ereignis A“) gilt: $x_A = x_A' = 0$ und $t_A = t_A' = 0$. Die Raumstation B hat (im System S) von der Raumstation A einen Abstand von 50 Lichtsekunden.

- a) Berechnen Sie in beiden Bezugssystemen die Raum-Zeit-Koordinaten des „Ereignisses B“: Das Raumschiff fliegt an der Raumstation B vorbei.
- b) Genau im Moment des Vorbeiflugs an Raumstation B sieht die Besatzung des Raumschiffes einen Lichtblitz, der von Raumstation A kommt. Berechnen Sie in beiden Bezugssystemen die Raum-Zeit-Koordinaten des Ereignisses, welches auf A diesen Lichtblitz ausgelöst hat („Ereignis C“).



Aufgabe 7: Wechselstromkreis (6 Punkte)

Die Skizze zeigt eine Schaltung mit zwei ohmschen Widerständen $R_1 = 30\Omega$ und $R_2 = 20\Omega$, einer Spule mit Induktivität $L = 10\text{mH}$ sowie einem Kondensator mit Kapazität $C = 2\mu\text{F}$. Die Spannungsquelle liefert eine Wechselspannung der Frequenz $f = 600\text{Hz}$ mit Effektivwert $U_{\text{eff}} = 10\text{V}$.

Berechnen Sie Betrag und Phase (Argument) der Impedanz der gesamten Schaltung.

