Lösung der Aufgabe 1 :

a) $x' = 5x + 2y + 1$
$y' = 3x + 4y + 2$
Fixpunktbedingung: $x' = x$, $y' = y$

$$x = 5x + 2y + 1$$
$$y = 3x + 4y + 2$$

$$\left.\begin{array}{l} 0 = 4x + 2y + 1 \\ 0 = 3x + 3y + 2 \end{array}\right| \begin{array}{l} \cdot 3 \\ \cdot 2 \end{array}\Big\}- \qquad \Big| \begin{array}{l} \cdot 3 \\ \cdot 4 \end{array}\Big\}-$$

$0 = 6x - 1$

$x = \frac{1}{6}$

$0 = -6y - 5$

$y = -\frac{5}{6}$ Fixpunkt $(\frac{1}{6} \mid -\frac{5}{6})$

Fixgeraden: in den beiden Gleichungen für die Fixpunktbedingungen müsste die gleiche Gerade dargestellt werden; dies ist nicht der Fall.

b)

$$\left.\begin{array}{l} x' = 5x + 2y + 1 \\ y' = 3x + 4y + 2 \end{array}\right| \begin{array}{l} \cdot 4 \\ \cdot 2 \end{array}\Big\}- \qquad \Big| \begin{array}{l} \cdot 3 \\ \cdot 5 \end{array}\Big\}-$$

$4x' - 2y' = 14x$ α^{-1} : $x = \frac{2}{7}x' - \frac{1}{7}y'$

$3x' - 5y' = -14y - 7$ $y = -\frac{3}{14}x' + \frac{5}{14}y' - \frac{1}{2}$

c) $y = m \cdot x + q$ x und y aus der Umkehrabbildung einsetzen:

$$-\frac{3}{14}x' + \frac{5}{14}y' - \frac{1}{2} = m \cdot (\frac{2}{7}x' - \frac{1}{7}y') + q$$

$$(\frac{5}{14} + \frac{m}{7}) \cdot y' = (\frac{3}{14} + \frac{2m}{7}) \cdot x' + (q + \frac{1}{2}) \qquad \Big| \cdot \frac{14}{5+2m}$$

$$y' = \frac{3+4m}{5+2m}x' + (q + \frac{1}{2}) \cdot \frac{14}{5+2m}$$

d) Koeffizientenvergleich: $\frac{3+4m}{5+2m} = m \Rightarrow 3 + 4m = 5m + 2m^2 \Leftrightarrow 2m^2 + m - 3 = 0$

und: $14\frac{q+\frac{1}{2}}{5+2m} = q \Rightarrow 14q + 7 = 5q + 2mq \Leftrightarrow (9 - 2m) \cdot q = -7 \Leftrightarrow q = -\frac{7}{9-2m}$

Lösungen $m = 1$ und daraus $q = -1$
$m = -\frac{3}{2}$ und daraus $q = \frac{7}{6}$

Man erhält zwei Fixgeraden $y = x - 1$ und $y = -\frac{3}{2}x - \frac{7}{12}$

e) Einsetzen von x und y aus der Umkehrabbildung in $105 \cdot x^2 - 56 \cdot (y + \frac{1}{2})^2 = 120$:

$$105 \cdot (\frac{2}{7}x' - \frac{1}{7}y')^2 - 56 \cdot (-\frac{3}{14}x' + \frac{5}{14}y' - \frac{1}{2} + \frac{1}{2})^2 = 120$$

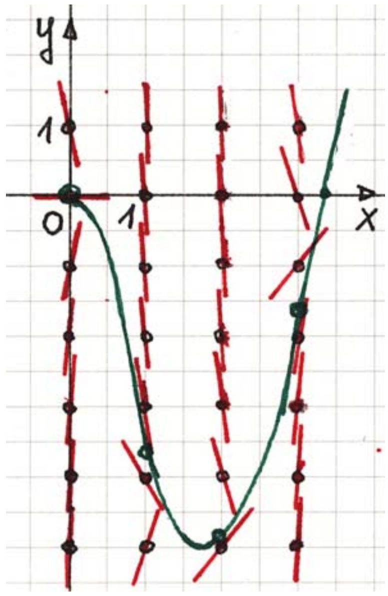
Mit Hilfe des TI voyage 200 erhält man die Lösung $6 \cdot x'^2 - 5 \cdot y'^2 = 120$

oder $\frac{x'^2}{20} - \frac{y'^2}{24} = 1$ .Hyperbel mit $a = 2\sqrt{5}$, $b = 2\sqrt{6}$, symmetrisch zu beiden Achsen, mit den Asymptoten $y = \pm\sqrt{\frac{6}{5}}x$, Brennpunkte $F_1(4\sqrt{61} \mid 0)$ und $F_2(-4\sqrt{61} \mid 0)$.

Lösung der Aufgabe 2:

a) Richtungsfeld der Differentialgleichung $y' = -5y - 26 \cdot \sin(x)$

y x	0	1	2	3
1	-5	-26,9	-28,6	-8,7
0	0	-21,9	-23,6	-3,7
-1	5	,16,9	-18,6	1,3
-2	10	-11,9	-13,6	6,3
-3	15	-6,9	-8,6	11,3
-4	20	-1,9	-3,6	16,3
-5	25	3,1	1,4	21,3



b) $y' + 5y = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -5 \cdot y$

Separation der Variablen: $\frac{dy}{y} = -5\,dx$ Integration $\int \frac{dy}{y} = -\int 5\,dx$

$\ln|y| = -5x + C$

$\underline{y = e^{-5x+C} = K \cdot e^{-5x}}$

c) Variation der Konstanten: $y = K(x) \cdot e^{-5x}$

$$y' = K'(x) \cdot e^{-5x} + K(x) \cdot (-5) \cdot e^{-5x}$$

eingesetzt in die inhomogene Differentialgleichung

$$K'(x) \cdot e^{-5x} + \cancel{K(x) \cdot (-5) \cdot e^{5x}} + \cancel{5 \cdot K(x) \cdot e^{-5x}} = -26 \sin(x)$$

$$K'(x) = -26\, e^{5x} \cdot \sin(x)$$

$$\underline{K(x) = -26 \cdot \int e^{5x} \cdot \sin(x)dx}$$

Partielle Integration: $\int e^{5x} \cdot \sin(x)dx = e^{5x} \cdot (-\cos(x)) - (-5\int e^{5x} \cos(x)dx) =$

$f(x) = e^{5x}$, $f'(x) = 5e^{5x}$
$g'(x) = \sin(x)$, $g(x) = -\cos(x)$

$$= -e^{5x} \cdot \cos(x) + 5(e^{5x} \cdot \sin(x) - 5\int e^{5x} \sin(x)dx)$$

$$\int e^{5x} \sin(x)dx = -e^{5x} \cos(x) + 5e^{5x} \sin(x) - 25\int e^{5x} \sin(x)dx$$

$$-26\cdot\int e^{5x}\sin(x)dx = e^{5x}\cdot\left(\cos(x)-5\sin(x)\right)+C$$

Also $K(x) = e^{5x}\,(\cos(x) - 5\cdot\sin(x)) + C$

und schliesslich $\underline{y = K(x)\cdot e^{-5x} = \cos(x) - 5\cdot\sin(x) + C\cdot e^{-5x}}$

d) Für $y(0) = 0$ ergibt sich $0 = \cos(0) - 5\cdot\sin(0) + C\cdot e^{0} = 1 + C \Rightarrow C = -1$

Mit der Anfangsbedingung $y(0) = 0$ erhält man die Lösung $\underline{y = \cos(x) - 5\cdot\sin(x) - e^{-5x}}$

Lösung der Aufgabe 3 :

a) f(z)= $w = \dfrac{2(1-i\cdot z)}{z-i}$ und $\overline{f(z)} = \overline{w} = \dfrac{2(1+i\cdot\overline{z})}{\overline{z}+i}$

Fixpunktbedingung: $z = \dfrac{2-2\cdot i\cdot z}{z-i} \quad \Big|\cdot(z-i)$

$$z^2 - i\cdot z = 2 - 2iz \quad\Leftrightarrow\quad z^2 + i\cdot z - 2 = 0$$

Fixpunkte $z_1 = \dfrac{\sqrt{7}}{2} - \dfrac{1}{2}i$ [Polarform $\sqrt{7}$ (cos 159.3.. + i·sin 159.3...)]

$z_2 = -\dfrac{\sqrt{7}}{2} - \dfrac{1}{2}i$ [Polarform $\sqrt{7}$ (cos 200.7.. + i·sin 200.7...)]

b) $w(z-i) = 2 - 2iz \quad\Leftrightarrow (w + 2i)\cdot z = 2 + i \quad\Rightarrow z = \dfrac{2+w\cdot i}{w+2\cdot i}$ mit $\overline{z} = \dfrac{2-\overline{w}\cdot i}{\overline{w}-2\cdot i}$

w und z vertauschen: $w = f^{-1}(z) = \dfrac{2+z\cdot i}{z+2\cdot i}$ <u>Umkehrabbildung</u> mit $\overline{w} = \dfrac{2-\overline{z}\cdot i}{\overline{z}-2\cdot i}$

$D = \mathbb{C}\setminus\{ i \}$, $W = \mathbb{C}\setminus\{ -2i \}$

c) Reelle Achse der w-Ebene: $w = \lambda$; $\overline{w} = \lambda$, also hat die reelle Achse die Gleichung
$w - \overline{w} = 0$ oder $w = \overline{w}$.
Setzt man die Umkehrfunktion in diese Gleichung ein, so erhält man

$$\frac{2(1-iz)}{z-i} = \frac{2(1+i\overline{z})}{\overline{z}+i} \Rightarrow (1-iz)\cdot(\overline{z}+i) = (1+i\overline{z})\cdot(z-i) \Leftrightarrow \overline{z}+i-iz\overline{z}-i^2z = z-i+iz\overline{z}-i^2\overline{z}$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = 2iz\overline{z}-2i \quad\Leftrightarrow\quad z\cdot\overline{z} = 1$$ Einheitskreis in der z-Ebene

Die Punkte des Einheitskreises in der z-Ebene werden durch die gegebene Abbildung auf die reelle Achse der w-Ebene abgebildet.

d) Gerade g: $z = \lambda i - 1$ und $\bar{z} = -\lambda i - 1$, also $z + \bar{z} = -2$

z und $\bar{z}$ eingesetzt : $\frac{2+wi}{w+2i} + \frac{2-\overline{w}i}{\overline{w}-2i} = -2 \;|\cdot (w+2i)\cdot(\overline{w}-2i)$

$$(2+wi)(\overline{w}-2i) + (2-\overline{w}i)(w+2i) = -2(w+2i)(\overline{w}-2i)$$

$$2\overline{w} - 4i + w\overline{w}i + 2w + 2w + 4i - w\overline{w}i + 2\overline{w} = -2w\overline{w} + 4iw - 4i\overline{w} - 8$$

$$4w + 4\overline{w} = -2w\overline{w} + 4iw - 4i\overline{w} - 8 \;|\cdot\; ½$$

$$w\overline{w} + (2-2i)\cdot w + (2+2i)\cdot\overline{w} + 4 = 0$$

Mit w = u + iv folgt

$$u^2 + v^2 + (2-2i)(u+iv) + (2+2i)(u-iv) + 4 = 0$$

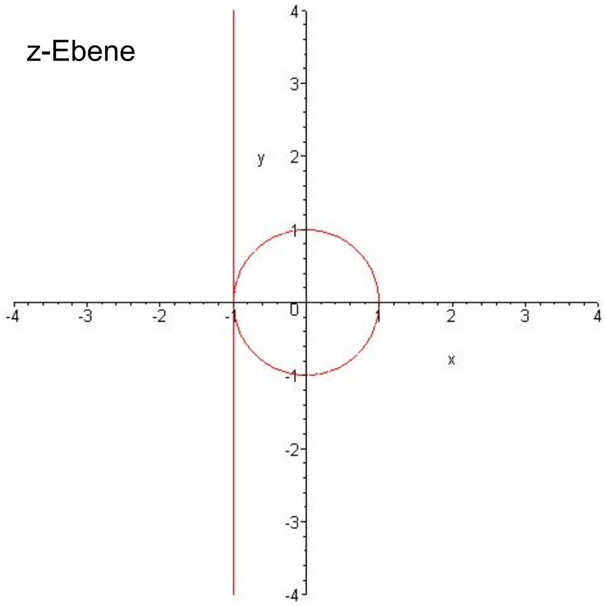
$$u^2 + v^2 + 2u + 2iv - 2iu + 2v + 2u - 2iv + 2iu + 2v + 4 = 0$$

$$u^2 + v^2 + 4u + 4v + 4 = 0$$

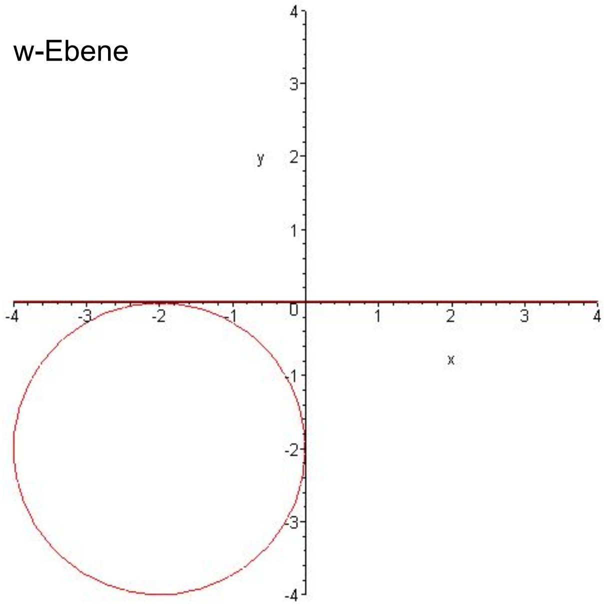
$$(u+2)^2 + (v+2)^2 = 4$$

Kreis mit Mittelpunkt M(-2|-2) und Radius 2.

z-Ebene



w-Ebene



Alternative zur Lösung der Aufgabe 3d) mit der Parametergleichung der Geraden:
Gerade: $z = -1 + \lambda i$
z einsetzen in die Abbildungsgleichung

$$w = \frac{2\cdot(1-i\cdot(-1+\lambda i))}{(-1+\lambda\cdot i)-i} = \frac{2\cdot((\lambda+1)+i)\cdot(-1-i\cdot(\lambda-1))}{(-1+i\cdot(\lambda-1))\cdot(-1-i\cdot(\lambda-1))} = 2\cdot\frac{(-1-\lambda-i\cdot\lambda^2+i-i+\lambda-1)}{1+(\lambda-1)^2} = 2\,\frac{-2-i\cdot\lambda^2}{\lambda^2-2\cdot\lambda+2}$$

Mit $w = u + i\cdot v$ folgt: $u = \frac{-4}{\lambda^2-2\cdot\lambda+2}$ und $v = \frac{-2\cdot\lambda^2}{\lambda^2-2\cdot\lambda+2}$

Löst man beide Gleichungen nach λ auf, so ergibt sich:

$\lambda_{1,2} = \frac{u \le \pm\sqrt{-u^2-4u}}{u}$ bzw. $\lambda_{1,2} = \frac{v\pm\sqrt{-v^2-4v}}{v+2}$

Gleichsetzen der beiden Ergebnisse und Auflösen nach v liefert

$v = -2 \pm\sqrt{-u^2-4u}$ | +2, Quadrieren

$(v + 2)^2 = -u^2 - 4u$ | $+u^2 + 4u + 4$

$\underline{(u + 2)^2 + (v + 2)^2 = 4}$

Lösung der Aufgabe 4:

a) Kontinuitätsgleichung:

$$v_1 \cdot A_1 = v_2 \cdot A_2 \Rightarrow v_2 = v_1 \cdot \frac{A_1}{A_2} = v_1 \cdot \frac{\pi \cdot (D_1/2)^2}{\pi \cdot (D_2/2)^2} = v_1 \cdot \frac{D_1{}^2}{D_2{}^2} = 25 v_1 = 1.25 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Bernoulli-Gleichung für h = konst.:

$$p_1 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_1{}^2 = p_2 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_2{}^2$$

$$p_2 = p_1 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \left(v_1{}^2 - v_2{}^2\right) = 10\mathrm{kPa} - 827\mathrm{Pa} = 9.17\mathrm{kPa}$$

b) Der Druck sinkt um knapp 10%. Dies kann zu einer Ablösung der Ablagerung führen (Thrombosegefahr).

c) Aktivität zu Beginn:

$$A_0 = 2.40 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{g} \cdot 3.20 \cdot 10^{17}\,\frac{\mathrm{Bq}}{\mathrm{g}} = 7.68 \cdot 10^{7}\,\mathrm{Bq}$$

Aktivität nach 2.5 Stunden:

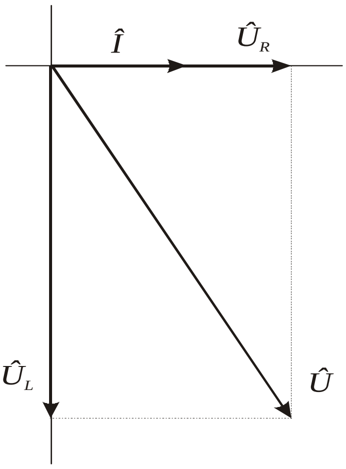
$A(t) = A_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$ mit $\lambda = \dfrac{\ln 2}{T_{1/2}}$

$$A(2.5\mathrm{h}) = A_0 \cdot e^{-\ln 2 \cdot (2.5\mathrm{h}/15\mathrm{h})} = 6.84 \cdot 10^{7}\,\mathrm{Bq}$$

Damit ergibt sich ein Blutvolumen $V = \dfrac{6.84 \cdot 10^{7}\,\mathrm{Bq}}{1.27 \cdot 10^{5}\,\mathrm{Bq}} \cdot 10 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{Liter} = 5.39\mathrm{Liter}$

d) ${}^{24}_{11}\mathrm{Na} \rightarrow {}^{24}_{12}\mathrm{Mg} + e^{-} + \overline{\nu}$

Lösung der Aufgabe 5:



a) Impedanz Z der Wechselstromschaltung:

$Z = \sqrt{R^2 + Z_C^2} = \sqrt{R^2 + \dfrac{1}{\omega^2 C^2}}$ mit $\omega = 2\pi \cdot f$

mit $R = 30\Omega$ und $Z_C = 53\Omega$ ergibt sich $Z = 60.9\Omega$

b) $\tan \Delta\varphi = \dfrac{Z_C}{R} \Rightarrow \Delta\varphi = 60.5°$

Die Spannung hinkt dem Strom um 60.5° nach.

c) Für einen Hochpass greift man die Spannung am ohmschen Widerstand ab. Für die Ausgangsspannung U_a gilt dann in Abhängigkeit von der Eingangsspannung U_e:

$$U_a = U_R = R \cdot I = R \cdot \frac{U_e}{Z} = R \cdot \frac{U_e}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} = \frac{U_e}{\sqrt{1 + \frac{1}{\omega^2 C^2 R^2}}}$$

Für sehr grosse Frequenzen wird $U_a \approx U_e$, für sehr kleine Frequenzen wird $U_a \approx 0$

(Hochpass).

d) $U_e(t) = U_C + U_R$

$$\hat{U} \cdot \sin(\omega \cdot t) = \frac{Q}{C} + R \cdot I = \frac{Q}{C} + R \cdot \dot{Q}$$

$$\dot{Q} + \frac{Q}{R \cdot C} = \frac{\hat{U}}{R} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

e) homogene Gleichung: $\dot{Q} + \frac{Q}{R \cdot C} = 0$

allgemeine Lösung (Beweis durch Einsetzen oder Herleitung wie in 2b):

$Q(t) = Q^* \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}}$ (Integrationskonstante: Q^*)

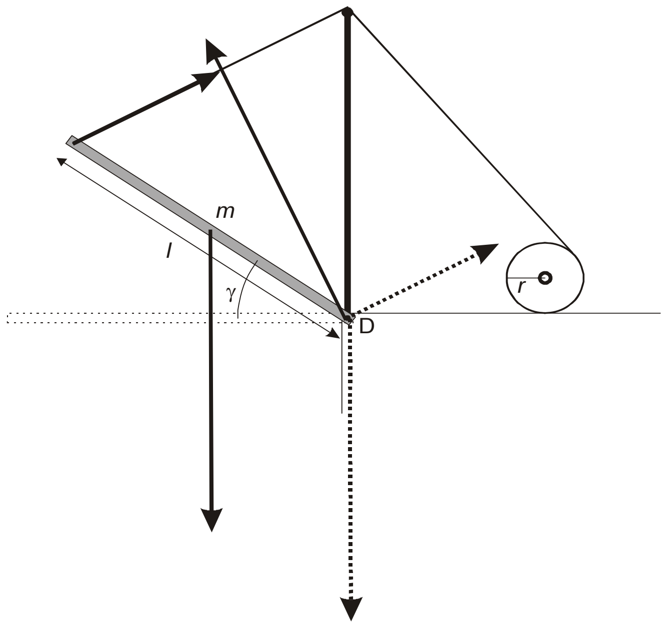
f) Ansatz: $Q_{inh}(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t) + B \cdot \cos(\omega \cdot t)$ (entspricht Lösung in 2c)

Lösung der Aufgabe 6:

a) Drehmomentengleichgewicht: $M_{links} = M_{rechts}$

$m \cdot g \cdot \frac{l}{2} \cdot \sin(90° - \gamma) = F_{Seil} \cdot l \cdot \sin(\alpha)$ mit dem Winkel α zwischen Brücke und Seil

Für α gilt: $2\alpha + (90° - \gamma) = 180° \Rightarrow \alpha = 45° + \frac{\gamma}{2}$.



$$m \cdot g \cdot \frac{l}{2} \cdot \cos\gamma = F_{Seil} \cdot l \cdot \sin(45° + \frac{\gamma}{2})$$

$$\Rightarrow F_{Seil} = \frac{m \cdot g}{2} \cdot \frac{\cos\gamma}{\sin(45° + \frac{\gamma}{2})} = 9.06\,\text{kN}$$

b) Drehmoment der Walze:

$M_{Walze} = F_{Seil} \cdot r = 2.72 \cdot 10^3\,\text{Nm}$

c) Ausser dem Drehmomentengleichgewicht muss auch ein Kräftegleichgewicht herrschen, und damit $\vec{F}_D = -(\vec{F}_G + \vec{F}_S)$.

d) Winkelbeschleunigung: $\alpha = \frac{M}{J}$

Trägheitsmoment bei Achse durch Schwerpunkt:

$$J_{Stab,S} = \frac{1}{12} m \cdot l^2$$

Trägheitsmoment bei Achse durch Drehpunkt D (Satz von Steiner):

$$J_{Stab,D} = \frac{1}{12} m \cdot l^2 + m \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^2 = 2.67 \cdot 10^3\,\text{kg m}^2$$

Damit ergibt sich die Winkelgeschwindigkeit:

$$\alpha = \frac{M_{links}}{J_{Stab,D}} = \frac{m \cdot g \cdot \frac{l}{2} \cdot \cos\gamma}{J_{Stab,D}} = 6.0 \frac{1}{\mathrm{s}^2}$$