1 Wahrscheinlichkeitsrechnung I

a) $P(3\,\text{gelbe}) = \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{3}{10} = \frac{1}{22}$

b) Binomialverteilung mit $n = 10$ und $p = \frac{1}{3}$, X = Anzahl rote Kugeln

$P(X = 3) = \binom{10}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^7 \approx 0.26$

c) $1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n \geq 0.99 \Rightarrow 0.01 \geq \left(\frac{3}{4}\right)^n \Rightarrow n \geq 16.007...$

Man muss mindestens 17 mal ziehen.

d)

Ereignis	rot	blau	gelb
Gewinn / Verlust x_i	r	- 3	- 6
$P(x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{12}$

$r \cdot \frac{1}{4} + (-3) \cdot \frac{1}{3} + (-6) \cdot \frac{5}{12} = 0 \Rightarrow r = 14$

$\Rightarrow$ Falls eine rote Kugel gezogen wird, müssen Fr. 20.– ausbezahlt werden.

2 Wahrscheinlichkeitsrechnung II

Ereignis A: Raucher ; Ereignis B: An Lungenkrebs erkrankt

$P(B) = 0.27 \cdot 0.15 + 0.73 \cdot 0.008 = 0.04634$

$P(A \cap B) = 0.27 \cdot 0.15 = 0.0405$

$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.0405}{0.04634} \approx 87.4\ \%$

3 Vektorgeometrie

a) $E: \vec{r} = \overrightarrow{OA} + u \cdot \overrightarrow{AB} + v \cdot \overrightarrow{AC} \Rightarrow \vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{l|lcl|} \text{I} & x & = & 3 - u - 4v \\ \text{II} & y & = & 6 - 4u - 8v \\ \text{III} & z & = & 5 - u \end{array} \Rightarrow 2 \cdot \text{I} - \text{II} = \text{IV}: 2x - y = 2u$$

$\text{IV} + 2 \cdot \text{III}: 2x - y + 2z = 10 \Rightarrow E: 2x - y + 2z - 10 = 0$

b) Für die parallele Ebene H gilt:

$H:\ 2x - y + 2z + d = 0$

$P \in H: 2 \cdot 3 - (-2) + 2 \cdot 7 + d = 0 \ \Rightarrow\ d = -22 \ \Rightarrow\ H:\ 2x - y + 2z - 22 = 0$

c) $h \cap E:\ 2(-3 + 2t) - (-2 + 2t) + 2(1 + t) - 10 = 0 \ \Rightarrow\ 4t - 12 = 0 \ \Rightarrow\ t = 3$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \ \Rightarrow\ D\,(3|4|4)$$

Oder alternativ mit F: $t = 4 \ \Rightarrow\ D_F\,(5|6|5)$

d) Abstand des Punktes P von der Geraden h:

Sei F der Lotfusspunkt auf der Geraden h, dann gilt: $\overrightarrow{v_h} \cdot \overrightarrow{FP} = 0$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 - (-3 + 2t) \\ -2 - (-2 + 2t) \\ 7 - (1 + t) \end{pmatrix} = 0 \ \Rightarrow\ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 - 2t \\ -2t \\ 6 - t \end{pmatrix} = 0$$

$2(6 - 2t) + 2(-2t) + 6 - t = 0 \ \Rightarrow\ 18 - 9t = 0 \ \Rightarrow\ t = 2$

$$\overrightarrow{FP} = \begin{pmatrix} 6 - 4 \\ -4 \\ 6 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \ \Rightarrow\ \overline{FP} = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 4^2} = 6$$

e) $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} \ \Rightarrow\ g:\ \vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix}$

Es existiert kein k, so dass $\begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \ \Rightarrow$ g und h nicht parallel

g und h windschief oder sich schneidend:

$$g \cap h: \left| \begin{matrix} 3 - 4s & = & -3 + 2t \\ 6 - 8s & = & -2 + 2t \end{matrix} \right| \ \Rightarrow\ s = \frac{1}{2} \ \Rightarrow\ t = 2$$

s und t in 3. Zeile eingesetzt: $5 + 0 \cdot \frac{1}{2} = 1 + 2 \cdot 1 \ \Rightarrow\ 5 = 3$

Widerspruch, also g und h windschief.

4 Folgen und Reihen

a) $d = -3x - (2x + 2) = 4x - 8 - (-3x)$

$\Rightarrow\ x = \frac{1}{2} \ \Rightarrow\ 3,\ -\frac{3}{2},\ -6 \ \Rightarrow\ d = -\frac{9}{2}$

b) $q = \frac{-3x}{2x + 2} = \frac{4x - 8}{-3x} \ \Rightarrow\ (x + 4)^2 = 0$

$\Rightarrow\ x = -4 \ \Rightarrow\ -6,\ 12,\ -24 \ \Rightarrow\ q = -2$

5 Differentialrechnung

$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 \quad ; \quad f'(x) = -x^2 + 4x \quad ; \quad f''(x) = -2x + 4 \quad ; \quad f'''(x) = -2$

a) Nullstellen:

$-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 = 0 \;\Rightarrow\; x^2\left(-\frac{1}{3}x + 2\right) = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = 0,\; x_2 = 6$

Extremalpunkte:

$-x^2 + 4x = 0 \;\Rightarrow\; x(-x+4) = 0 \;\Rightarrow\; x_3 = 0,\; x_4 = 4$

$f''(0) = 4 > 0 \;\Rightarrow\; T(0 \mid 0)$

$f''(4) = -4 < 0 \;\Rightarrow\; H\left(4 \mid \frac{32}{3}\right)$

b) Wendepunkt:

$-2x + 4 = 0 \;\Rightarrow\; x_5 = 2$

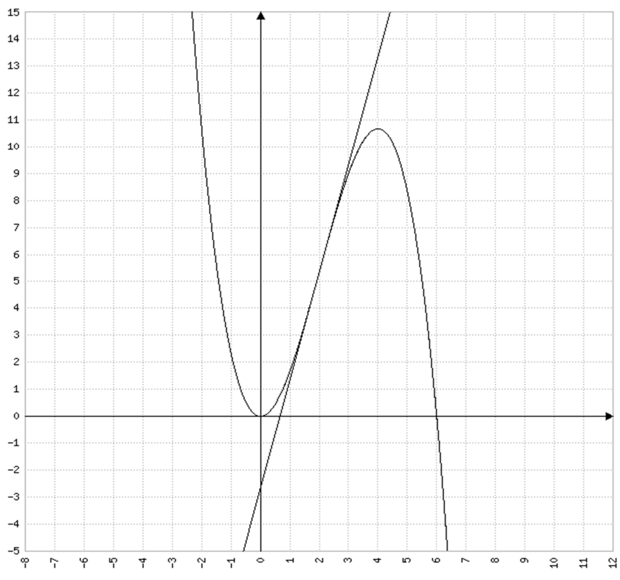
$f'''(2) \neq 0 \;\Rightarrow\; W\left(2 \mid \frac{16}{3}\right)$

Wendetangente:

$m = f'(2) = 4 \;\Rightarrow\; t(x) = 4x + q$

$W \in t \;\Rightarrow\; \frac{16}{3} = 4 \cdot 2 + q \;\Rightarrow\; q = -\frac{8}{3} \;\Rightarrow\; t(x) = 4x - \frac{8}{3}$

c) Graphen



d) $f_a(x) = a\,x^3 + 2\,x^2 \quad ; \quad f_a'(x) = 3\,a\,x^2 + 4\,x \quad ; \quad f_a''(x) = 6\,a\,x + 4$

Nullstelle:

$a\,x^3 + 2\,x^2 = 0 \;\Rightarrow\; x^2\,(a\,x + 2) = 0$

$x \neq 0 \;\Rightarrow\; x = -\dfrac{2}{a}$

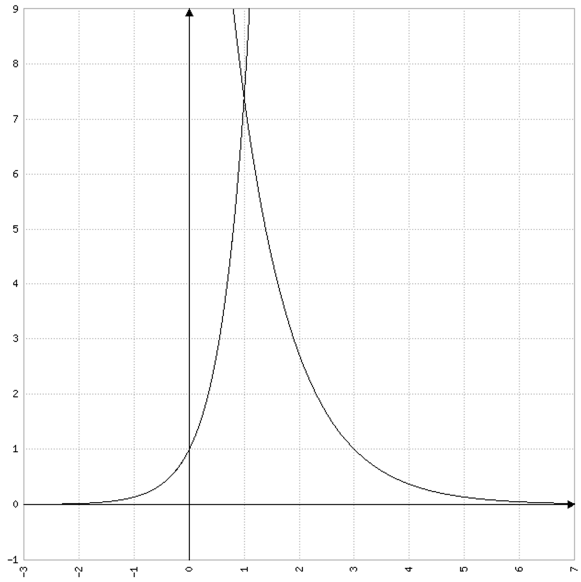
Steigung:

$f_a'\left(-\dfrac{2}{a}\right) = 3\,a\left(-\dfrac{2}{a}\right)^2 + 4\left(-\dfrac{2}{a}\right) = \dfrac{12}{a} - \dfrac{8}{a} = \dfrac{4}{a}$

$\Rightarrow\; \dfrac{4}{a} = -4 \;\Rightarrow\; a = -1$

6 Integralrechnung

a) $e^{3-x} = e^{2x} \;\Rightarrow\; 3 - x = 2\,x \;\Rightarrow\; x = 1 \;\Rightarrow\; S\left(1 \mid e^2\right)$



b) $A = \int_0^1 g(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx = \int_0^1 e^{2x}\,dx + \int_1^2 e^{3-x}\,dx$

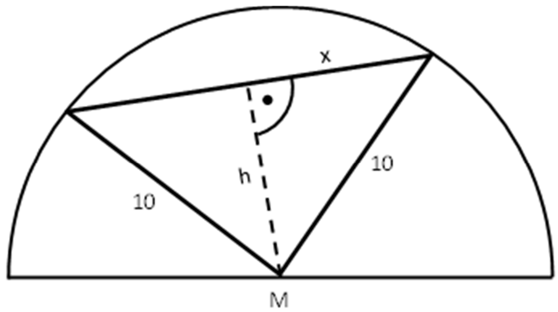
$A = \left[\dfrac{1}{2}\,e^{2x}\right]_0^1 + \left[-e^{3-x}\right]_1^2 = \dfrac{e^2}{2} - \dfrac{1}{2} - e + e^2 = \dfrac{3}{2}\,e^2 - e - \dfrac{1}{2}$

$A \approx 7.87$

c) $\lim\limits_{k\to\infty} \int_a^k e^{3-x}\,dx = \lim\limits_{k\to\infty} \left[-e^{3-x}\right]_a^k = \lim\limits_{k\to\infty} \left(-e^{3-k} + e^{3-a}\right) = e^{3-a}$

$e^{3-a} = 1 \;\Rightarrow\; 3 - a = 0 \;\Rightarrow\; a = 3$

7 Extremwertaufgabe



Hauptbedingung: $A = 2 \cdot \frac{x\,h}{2} = x\,h$

Nebenbedingung: $x^2 = 100 - h^2 \Rightarrow x = \sqrt{100 - h^2}$

Zielfunktion: $A(h) = h\sqrt{100 - h^2}$

A) Lösungsweg mit quadrierter Zielfunktion:

$A^2(h) = h^2\left(100 - h^2\right) = 100\,h^2 - h^4$

$\left(A^2\right)'(h) = 200\,h - 4\,h^3 = 0 \Rightarrow h\left(50 - h^2\right) = 0 \Rightarrow h = \sqrt{50}$

$\Rightarrow x = \sqrt{50} \Rightarrow A = 50$

B) Lösungsweg ohne quadrierte Zielfunktion:

$A'(h) = \sqrt{100 - h^2} + \frac{h}{2\sqrt{100 - h^2}}\left(-2\,h\right) = \sqrt{100 - h^2} - \frac{h^2}{\sqrt{100 - h^2}}$

$\Rightarrow \sqrt{100 - h^2} - \frac{h^2}{\sqrt{100 - h^2}} = 0 \quad \Big| \cdot \sqrt{100 - h^2}$

$\Rightarrow 100 - h^2 - h^2 = 0 \Rightarrow h = \sqrt{50} \Rightarrow x = \sqrt{50} \Rightarrow A = 50$

Alternative Lösung:

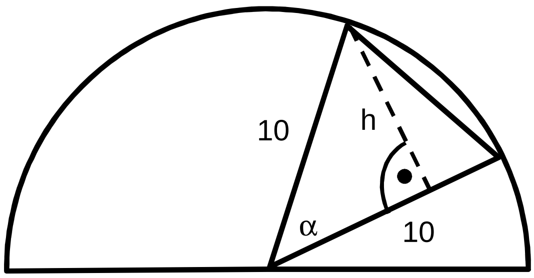
$A = \frac{r\,h}{2} = 5\,h$

$\sin\alpha = \frac{h}{r} \Rightarrow h = r\sin\alpha = 10\sin\alpha$

$\Rightarrow$ Zielfunktion: $A(\alpha) = 50\sin\alpha$

$A'(\alpha) = 50\cos\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 90°$

$\Rightarrow A(90°) = 50$



8 Kreis

a) $k: x^2 - 6x + y^2 - 8y = 0$

Quadratisch Ergänzen ergibt: $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25 \Rightarrow M(3|4),\ r = 5$

b) A) Lösungsweg über den Mittelpunkt und die Normale

$n: y = -\frac{4}{3}x + q$

$M \in n \Rightarrow 4 = -\frac{4}{3}\cdot 3 + q \Rightarrow q = 8 \Rightarrow n: y = -\frac{4}{3}x + 8$

$n \cap k: (x-3)^2 + \left(-\frac{4}{3}x + 8 - 4\right)^2 = 25 \Rightarrow (x-3)^2 + \left(-\frac{4}{3}x + 4\right)^2 = 25$

$\Rightarrow x^2 - 6x + 9 + \frac{16}{9}x^2 - \frac{32}{3}x + 16 = 25 \Rightarrow \frac{25}{9}x^2 - \frac{50}{3}x = 0$

$\Rightarrow x(x-6) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 6 \Rightarrow P_1(0\,|\,8),\ P_2(6\,|\,0)$

$t: y = \frac{3}{4}x + q$

$P_1 \in t_1 \Rightarrow 8 = \frac{3}{4}\cdot 0 + q \Rightarrow q = 8 \Rightarrow t_1: y = \frac{3}{4}x + 8$

$P_2 \in t_2 \Rightarrow 0 = \frac{3}{4}\cdot 6 + q \Rightarrow q = -\frac{9}{2} \Rightarrow t_2: y = \frac{3}{4}x - \frac{9}{2}$

B) Lösungsweg über die Diskriminante

$t: y = \frac{3}{4}x + q$

$\Rightarrow x^2 - 6x + \left(\frac{3}{4}x + q\right)^2 - 8\left(\frac{3}{4}x + q\right) = 0$

$\Rightarrow x^2 - 6x + \frac{9}{16}x^2 + \frac{3q}{2}x + q^2 - 6x - 8q = 0$

$\Rightarrow \frac{25}{16}x^2 + \left(\frac{3q}{2} - 12\right)x + q^2 - 8q = 0$

$D = \left(\frac{3q}{2} - 12\right)^2 - 4\cdot\frac{25}{16}\left(q^2 - 8q\right) = 0$

$\Rightarrow \frac{9}{4}q^2 - 36q + 144 - \frac{25}{4}q^2 + 50q = 0 \Rightarrow -4q^2 + 14q + 144 = 0$

$\Rightarrow 2q^2 - 7q - 72 = 0 \Rightarrow q_{1,2} = \frac{7 \pm 25}{4}$

$q_1 = 8 \Rightarrow t_1: y = \frac{3}{4}x + 8$

$q_2 = -\frac{9}{2} \Rightarrow t_2: y = \frac{3}{4}x - \frac{9}{2}$