KANTON LUZERN
Bildungs- und Kulturdepartement

Schriftliche Maturitätsprüfung 2013

Kantonsschule Reussbühl

Schwerpunktfach Physik und Anwendungen der Mathematik

Prüfende Lehrpersonen	*Yves Gärtner (yves.gaertner@edulu.ch)* *Pascal Stäuber (pascal.staeuber@edulu.ch)*
Klassen	*6cK*
Prüfungsdatum	*27. Mai 2013*
Prüfungsdauer	*3 Stunden*
Erlaubte Hilfsmittel	*Taschenrechner V-200, Formelsammlung „Formeln, Tabellen, Begriffe" DMK*
Anweisungen zur Lösung der Prüfung	• *Verwenden Sie für jede Aufgabe einen neuen Bogen.* • *Alle verwendeten Symbole sind zu definieren (sofern nicht im Aufgabentext definiert).* • *Formeln, welche nicht der Formelsammlung entnommen werden, sind zu beweisen oder zu begründen.* • *Bei den Aufgaben 1 - 5 sind physikalisch relevante Ansätze zu begründen und allgemeine Lösungen anzustreben.* • *Bei den Aufgaben 6 - 9 sind alle algebraischen Umformungen und alle Berechnungen manuell auszuführen. Der V-200 darf nur für numerische Berechnungen oder zur Kontrolle benützt werden.* • *Wenn Sie für eine Teilaufgabe ein Resultat einer vorhergehenden Teilaufgabe verwenden müssen, welche Sie nicht gelöst haben, können Sie, falls keine Alternative gegeben wird, mit einem selbst gewählten Wert weiter rechnen. Dieser ist dann aber deutlich zu kennzeichnen.*
Anzahl erreichbarer Punkte	*Aufgabe 1: 7* *Aufgabe 2: 7* *Aufgabe 3: 4* *Aufgabe 4: 5* *Aufgabe 5: 7* *Aufgabe 6: 8* *Aufgabe 7: 8* *Aufgabe 8: 8* *Aufgabe 9: 6* *Total: 60* *Notenmassstab: 48 Punkte = Note 6*
Anzahl Seiten (inkl. Titelblatt)	*4*

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg

Aufgabe 1: (7 Punkte)

Ein Vollzylinder und eine Kugel mit gleichem Radius rollen mit gleicher Anfangsgeschwindigkeit v_0 eine geneigte Ebene hinauf.
Leiten Sie für jeden Körper eine Gleichung zur Berechnung der von den Körpern auf der geneigten Ebene erreichten Höhe her und vergleichen Sie diese Höhen. Welcher Körper erreicht die grössere Höhe?

Aufgabe 2: (7 Punkte)

Ein U-Boot sei unterwegs mit der Geschwindigkeit v_0. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird der Motor so umgeschaltet, dass das U-Boot mit konstanter Kraft F_M gebremst wird. Die Reibungskraft, die auf das U-Boot wirkt, sei proportional zur Geschwindigkeit ($F_R = -\beta v(t)$).

a) Stellen Sie für dieses Problem die Differentialgleichung für $v(t)$ auf und lösen Sie diese unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung $v(0) = v_0$.

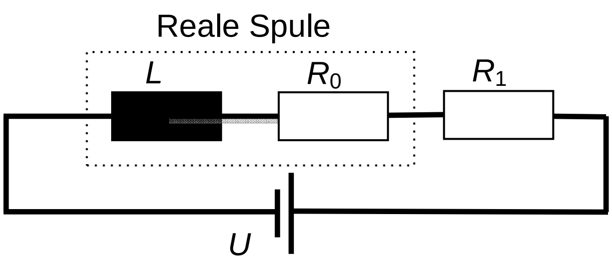
b) Wie lautet das Weg-Zeit-Gesetz für diese Bewegung? Berechnen Sie die Funktion $s(t)$. $s(0)$ sei 0.

Aufgabe 3: (4 Punkte)

Die maximale Dauerleistung eines Autos sei 75 kW. Fährt das Auto mit dieser konstanten Leistung auf der ebenen Autobahn, so beträgt seine Geschwindigkeit $v = 180\ km/h$.
Hierbei verbraucht das Auto 12.2 l Benzin auf 100 km. Berechnen Sie den Wirkungsgrad des Motors.
(Der Heizwert von Benzin sei $H_{Benzin} = 42\ MJ/kg$. Die Dichte von Benzin betrage $\rho_{Benzin} = 800\ kg/m^3$).

Aufgabe 4: (5 Punkte)

Eine reale Spule mit der Eigeninduktivität L und dem Gleichstromwiderstand R_0 wird seriell mit einem ohmschen Widerstand $R_1 = 30\ \Omega$ verbunden.
Zunächst wird eine Gleichspannung $U_G = 12.0\ V$ angelegt. Dabei ist die Stromstärke konstant $I_G = 286\ mA$.



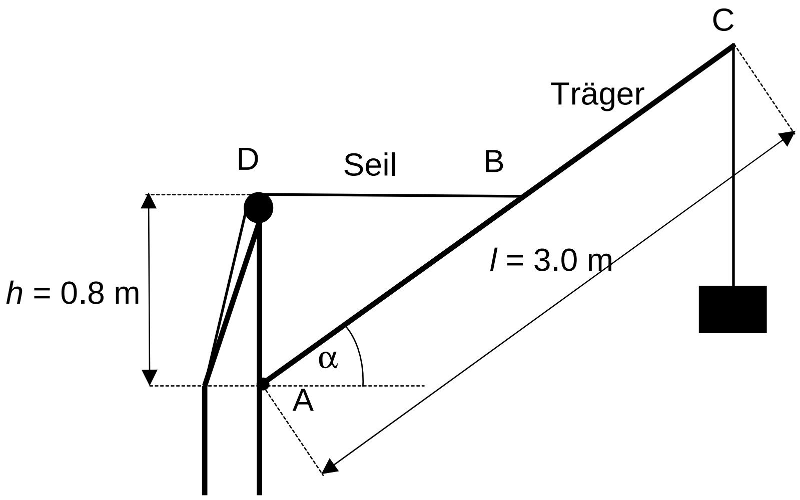
Anschliessend legt man eine sinusförmige Wechselspannung mit dem Effektivwert $U_{eff} = 12.0\ V$ und der Frequenz $f = 85.0\ Hz$ an. Nun misst man die Stromstärke $I_{eff} = 261\ mA$.
Berechnen Sie den Wechselstromwiderstand Z der Schaltung, den Gleichstromwiderstand R_0 der Spule und ihre Eigeninduktivität L.

Aufgabe 5: (7 Punkte)

Der Träger AC ($l = 3.0\ m$) des abgebildeten Krans ist in A drehbar gelagert und wird von einem horizontalen Seil BD im Gleichgewicht gehalten.

a) Welche Last F_C darf in C höchstens angehängt werden, wenn das Seil BD mit höchstens $F_S = 7500\ N$ beansprucht werden kann? Die Masse des Trägers ist $m = 150\ kg$, sein Schwerpunkt befindet sich in der Trägermitte B.

b) Mit welcher Kraft F_A wird das Lager A belastet?



Aufgabe 6: Raumgeometrie (8 Punkte)

Die Ebene $E: x - 2y + 2z + 23 = 0$ schneidet die Kugel K mit Mittelpunkt $M(2\,|\,3\,|\,4)$ und Radius $R = 15$.

a) Berechnen Sie die Koordinaten des Mittelpunktes Q und den Radius r des Schnittkreises k.

b) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Tangentialebene T an K, die parallel zur Ebene E ist und möglichst nahe bei E liegt.

c) Berechnen Sie das Volumen des geraden Kreiskegels, der den Kreis k aus Teilaufgabe a) als Grundkreis hat und dessen Spitze S in der Ebene T liegt. Berechnen Sie dann auch das Volumen des Kugelsegmentes von K, der diesen Kegel umschliesst. Wie viel Prozent des Volumens des Segmentes macht das Volumen des Kegels aus?

Aufgabe 7: Komplexe Funktionen (8 Punkte)

Gegeben sind die 2 komplexen Funktionen $f(z)=\frac{9}{z}-2i$ und $h(z)=-3i\cdot z^2-2i$.

a) Berechnen Sie die Nullstellen und die Fixpunkte der Funktion h.

b) Berechnen Sie die Schnittstellen von f und h.

c) Der Einheitskreis $k:|w|=1$ in der Bildebene ist gegeben. Bestimmen Sie sein Urbild unter der Funktion f. Was stellt dieses Urbild $f^{-1}(k)$ dar?

Aufgabe 8: Differentialgleichung (8 Punkte)

Gegeben ist das Anfangswertproblem

$$y''+4y'+\frac{25}{4}y=25x+16 \text{ mit } y(0)=0 \text{ und } y(\pi)=0.$$

a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge y_H der homogenen DGL $y''+4y'+\frac{25}{4}y=0$.

b) Berechnen Sie eine partikuläre Lösung y_p der inhomogenen DGL und geben Sie deren Lösungsmenge an.

c) Berechnen Sie die spezielle Lösung y_s des Anfangswertproblems.

Aufgabe 9:

a) **Affine Abbildungen (3 Punkte)**

Die affine Abbildung $\alpha: IR^2 \to IR^2: \vec{x} \mapsto A\vec{x}+\vec{v}$ entsteht aus einer Scherung σ in Richtung x-Achse mit Scherungsfaktor 1 gefolgt von einer Drehung ρ um den Ursprung um $-45°$ und anschliessender Verschiebung in Richtung y-Achse um 4 Einheiten.
Geben Sie die Abbildungsgleichungen der Scherung σ und der Drehung ρ für sich alleine in Matrixform an und berechnen Sie dann daraus die Gleichung der Abbildung α.

b) **Rotationsvolumen (3 Punkte)**

Gegeben ist die Funktion $f:[1;\infty[\to IR: x \mapsto \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$.

Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers, der entsteht, wenn der Graph von f zwischen den Stellen $x=1$ und $x=e^3$ um die x-Achse gedreht wird.