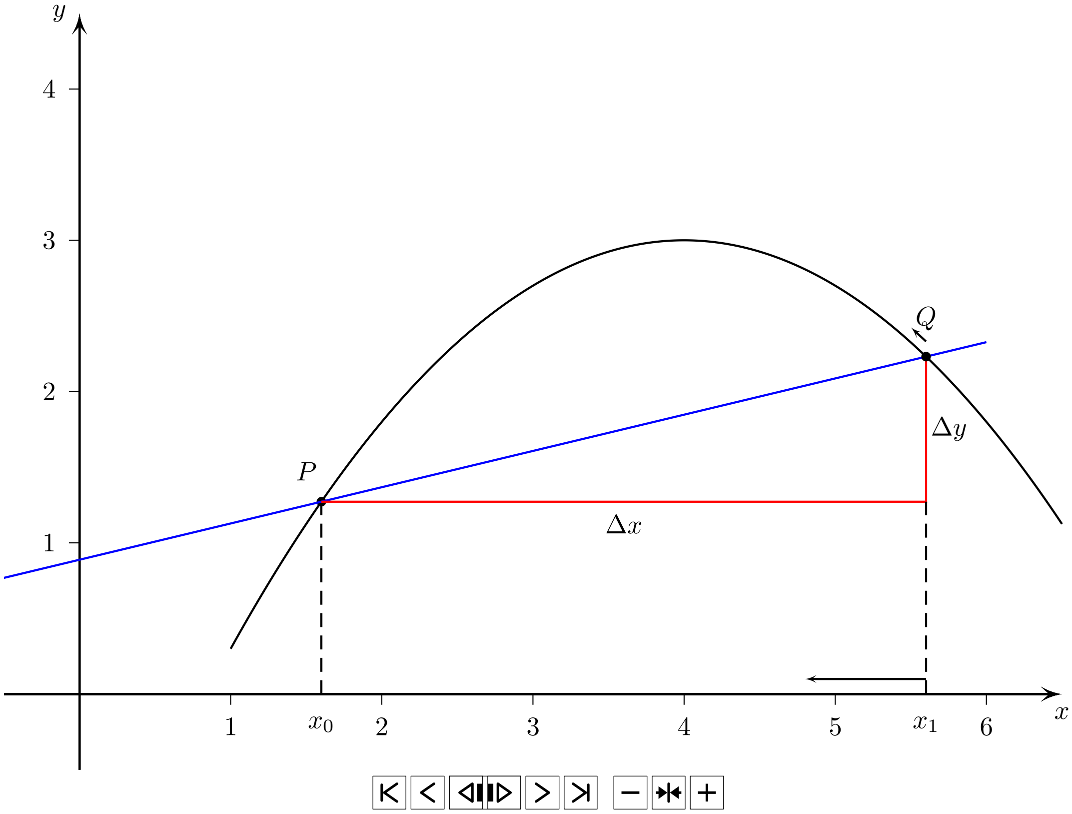
Geometrische Bedeutung der Ableitung

1 Übergang Sekante-Tangente



Erläuterungen:

1. Der Differenzenquotient im Intervall $[x_0, x_1]$ ist bekanntlich

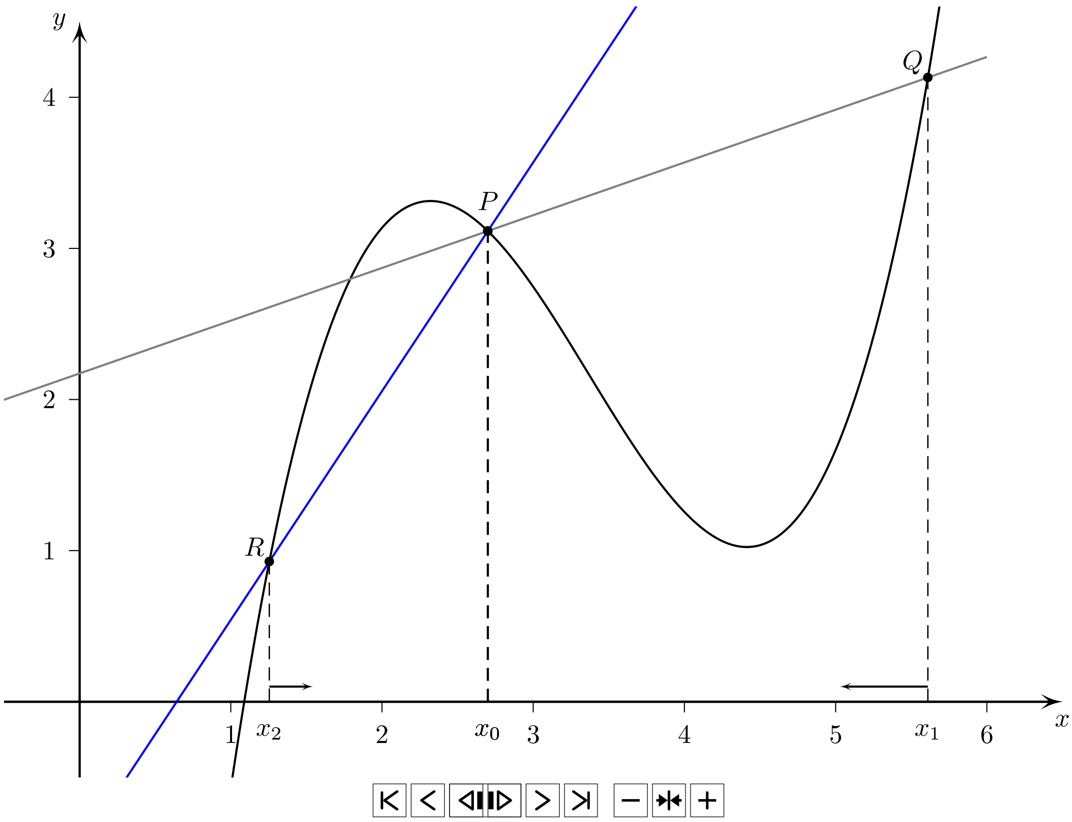
$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

   Dies entspricht der Steigung der Sekante durch den festen Punkt P und den Punkt Q, der variiert wird. Das Steigungsdreieck ist rot in die Grafik eingezeichnet.

2. Lassen wir nun x_1 geben x_0 wandern, so bewegt sich der Punkte Q auf dem Graphen der Funktion gegen den Punkt P. Das Steigungsdreieck ändert sich dann auch.

3. Im Grenzfall kommt der Punkt Q auf dem Punkt P zu liegen und aus der Sekante wird eine Tangente. Die Sekantensteigung geht dann die Tangentensteigung über.

2 Grenzübergang von beiden Seiten



Erläuterungen:

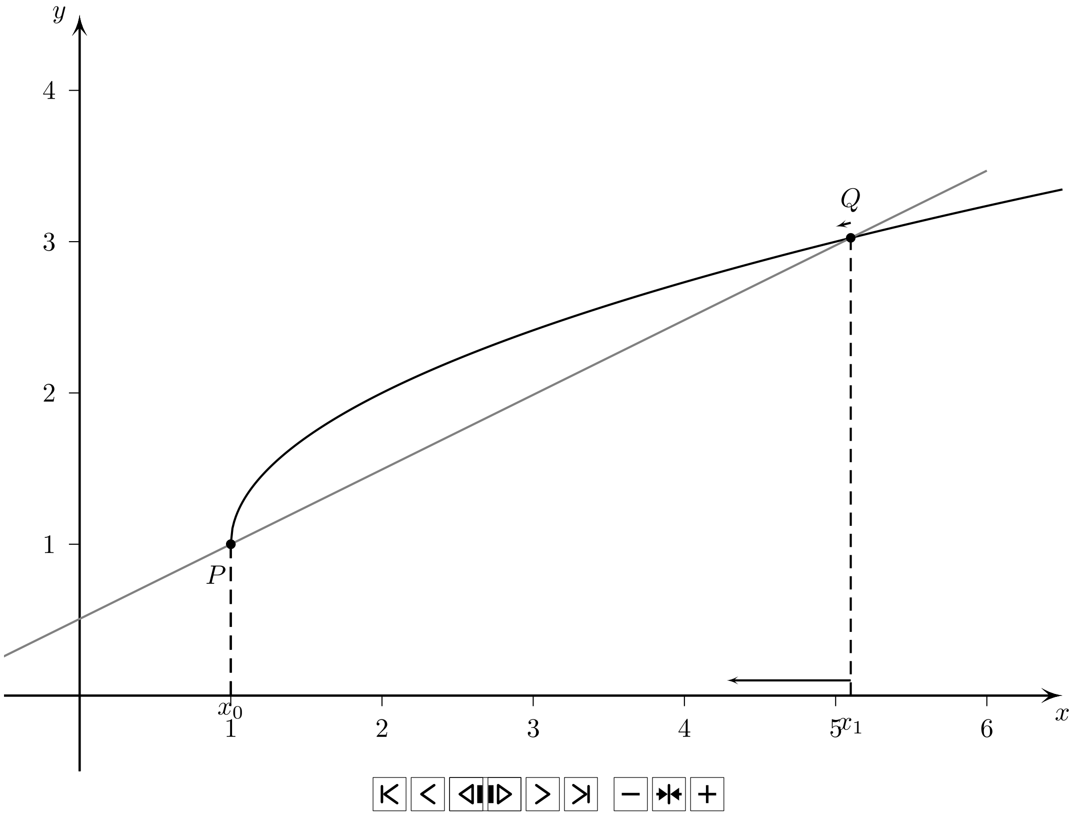
1. Auf der vorhergehenden Seite haben wir die Stelle x_0 von oben (von rechts im Koordinatensystem) angenähert. Das heisst die x_1 ist grösser als x_0.

2. Die gleiche Überlegung können wir natürlich auch mit einer Annäherung von unten (von links im KS) machen. Auch hier gehen die Sekanten in eine Tangente über.

3. Damit wir von *der* Steigung der Tangenten sprechen können, muss die Annäherung von oben und von unten die gleiche Tangente im Punkt $P(x_0, f(x_0))$ ergeben.

4. So selbstverständlich Punkt 3. erscheint, muss dies nicht immer sein. Folgende Beispiele zeigen dies.

3 Annäherung nur von einer Seite; Vertikale Tangente



Erläuterungen:

1. Die Grafik zeigt den Graphen der Funktion $f(x) = \sqrt{x-1} + 1$. Diese Funktion ist nur für $x \geq 1$ definiert (für $x < 1$ müssten wir die Wurzel aus einer negativen Zahl ziehen).

2. Währenddem wir für alle Stellen $x > 1$ die Ableitung wie in den ersten beiden Beispielen bestimmen können, ist das an der Stelle $x = 1$ nicht möglich. Hier ist die Annäherung nur von einer Seite (von oben) möglich, weil die Funktion für $x < 1$ gar nicht definiert ist.

3. Die Tangente an der Stelle $x = 1$ haben wir durch Annäherung von oben erhalten. Diese Tangente ist vertikal, also parallel zu y-Achse. Dies bringt aber Probleme mit sich. Die Tangenten in den ersten beiden Beispielen sind Geraden, die wir in der Form

   $$t(x) = y = ax + b$$

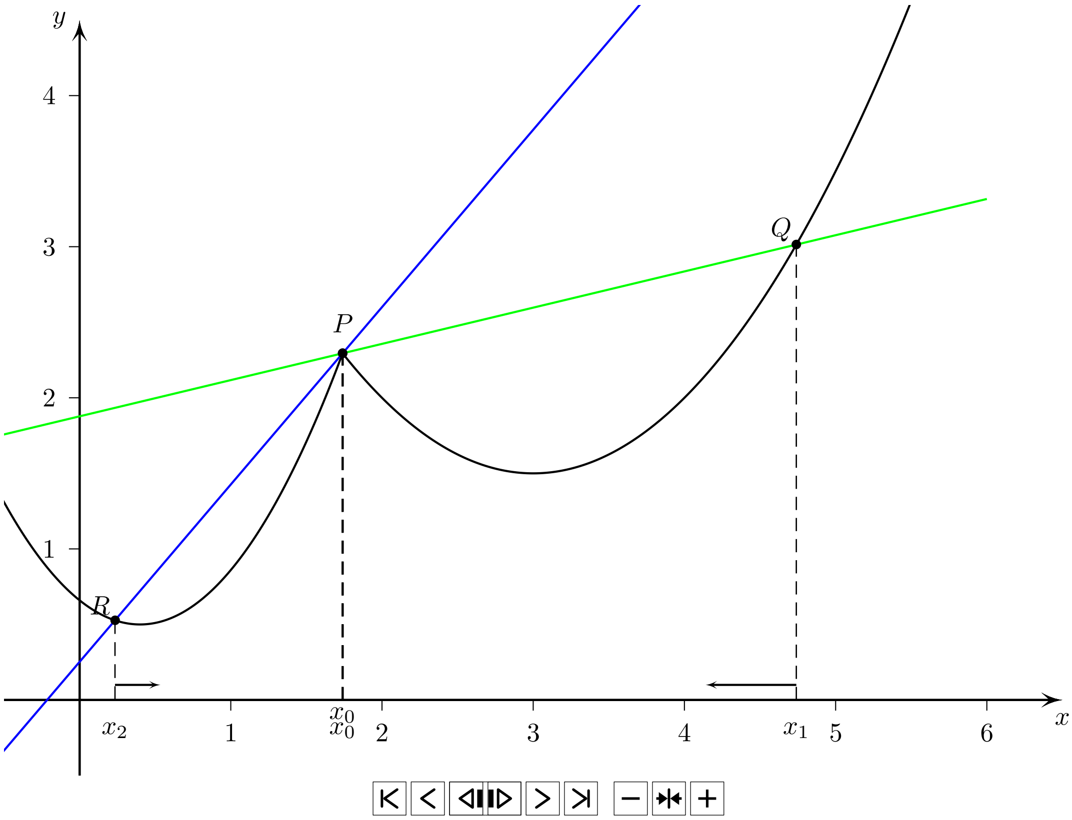
   schreiben. Die ist in diesem Beispiel nicht möglich. Die Steigung einer vertikalen Geraden ist *nicht* definiert.

   Es gibt also keine Funktionsgleichung für vertikale Geraden. Dies auch darum, weil vertikalen Geraden gar *keine* Funktionen sind. Hier werden der Stelle $x = 1$ unendlich viele Funktionswerte zugeordnet.

4. Dies wollen wir ausschliessen:

   Die Ableitung ist an Stellen mit einer vertikalen Tangente nicht definiert.

4 Knickstellen



Erläuterungen:

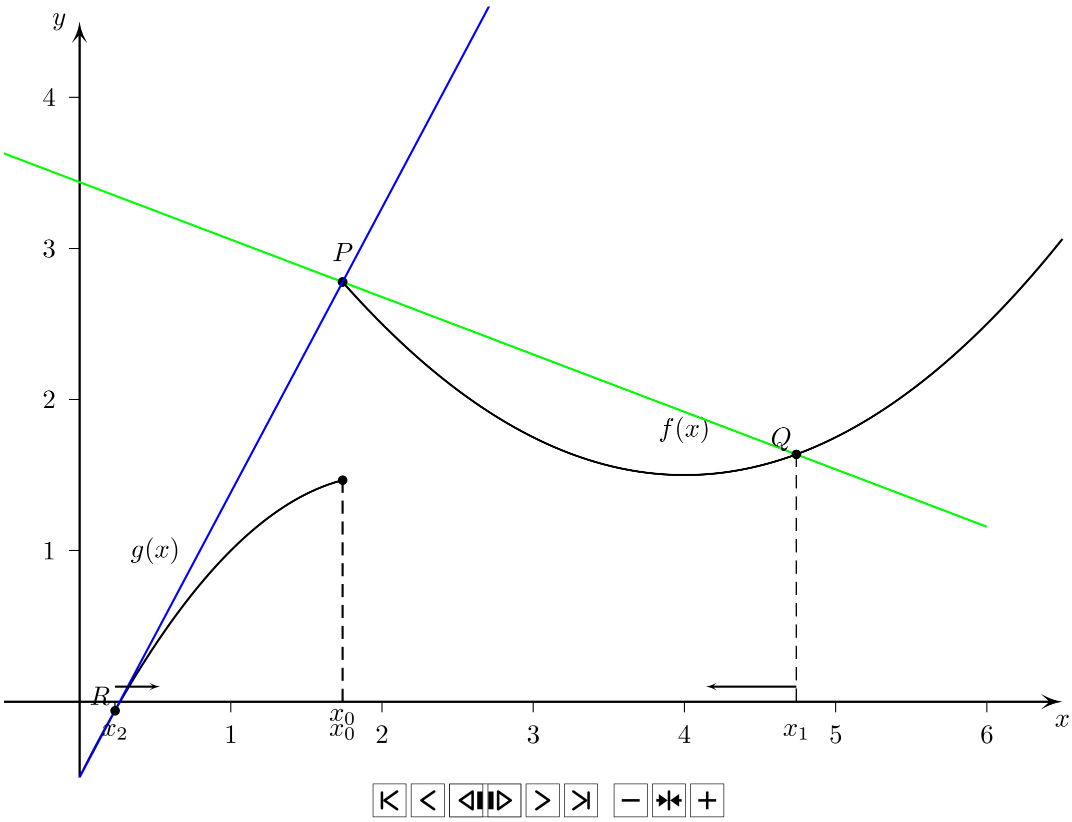
1. Dieser Funktionsgraph hat an der Stelle $x_0 = 1.7395$ einen Knick. Der Graph ändert dort abrupt seine Richtung.

2. Wir wollen wieder die Tangente an den Graphen im Punkt $P(x_0, f(x_0)$ bestimmen. Die Annäherung von beiden Seiten durch Tangenten führt aber zu *zwei verschiedenen* Tangenten im Punkt P.

3. Somit hätten wir an dieser Stelle zwei verschiedene Werte für die Ableitung und dies wollen wir ausschliessen:

   Die Ableitung ist an Stellen mit Knick nicht definiert.

5 Unstetigkeitsstellen



Erläuterungen:

1. Die Funktion ist an der Stelle $x_0 = 1.7395$ unstetig. Der Graph springt in diesem Punkt. (Achtung: Die Funktion hat an der Stelle x_0 den Wert von $g(x)$ oder von $f(x)$, aber nicht von beide Funktionen. Da die Werte dort jeweils verschieden sind hätten wir keine Funktion mehr, wenn $f(x_0)$ *und* $g(x_0)$ dort gelten lassen.)

2. Wir erhalten wieder zwei verschiedene Tangenten, in einem Falle sogar eine vertikale Tangente. Dies wollen wir ausschliessen:

   Die Ableitung ist an Stellen mit einer Unstetigkeit nicht definiert.