

Geometrische Veranschaulichung von Extremalaufgaben

Inneres Extremum

Erläuterungen:

1. Ein Rechteck wird so in das Koordinatensystem einbeschrieben, dass eine Ecke im Ursprung liegt, mit je einer Seite auf den positiven Koordinatenachsen. Eine Ecke P liegt auf der fallenden Geraden im I. Quadranten. Gesucht ist die Lage des Punktes P auf der Geraden, bei der das Rechteck maximale Fläche annimmt.
2. In der Grafik ist dabei noch gepunktet die Flächenfunktion eingezeichnet, die für jede Lage des Punktes P auf der Geraden die zugehörige Fläche des Rechtecks angibt.
3. Wir lassen nun den Punkt P von links nach rechts wandern. Es ist aus der geometrischen Situation ersichtlich, dass die Fläche erst zu- und dann wieder abnimmt. Das Rechteck ist dann am grössten, wenn die x -Koordinate des Punktes P gleich $x = 2.5$ ist (das muss natürlich berechnet werden und kann nicht einfach so aus der Skizze abgelesen werden).
4. Wir sprechen hier von einem inneren Extremum, da die Rechtecksfläche für eine x -Stelle innerhalb des Definitionsbereichs $[0, 5]$ den maximalen Wert annimmt. Wir erhalten diese x -Stelle durch Nullsetzen der Ableitungsfunktion der Flächenfunktion.

(siehe nächste Seite)

Randextremum

Erläuterungen:

1. In diesem Beispiel liegt eine Ecke des Rechtecks in $(4/0)$ und die gegenüberliegende Ecke auf dem Graphen der Parabel. Die Seiten des Rechtecks sind wieder parallel zu den Koordinatenachsen. Auch in diesem Fall ist die Flächenfunktion gepunktet eingezeichnet. Sie gibt wieder zu jedem Punkt P auf dem Graphen die zugehörige Fläche an. Der Verlauf dieser Flächenfunktion ist in diesem Fall aber nicht mehr so einfach.
2. Wir lassen wieder den Punkt P von links nach rechts auf dem Graphen der Parabel wandern. Die Fläche nimmt erst leicht ab, dann wieder ein bisschen zu und dann wieder ab. Liegt der Punkt P auf der y -Achse, ist die Fläche maximal.
3. Wir sprechen in diesem Fall von einem Randextremum. Das Maximum des Rechtecks wird an einer x -Stelle am Rand des Definitionsbereiches $[0, 4]$ angenommen. Diese x -Stelle erhalten wir *nicht* durch Nullsetzen der Ableitungsfunktion der Flächenfunktion. Wir müssen die inneren Extremwerte mit den Randwerten vergleichen. In diesem Fall ist das Randmaximum grösser als das innere Maximum.