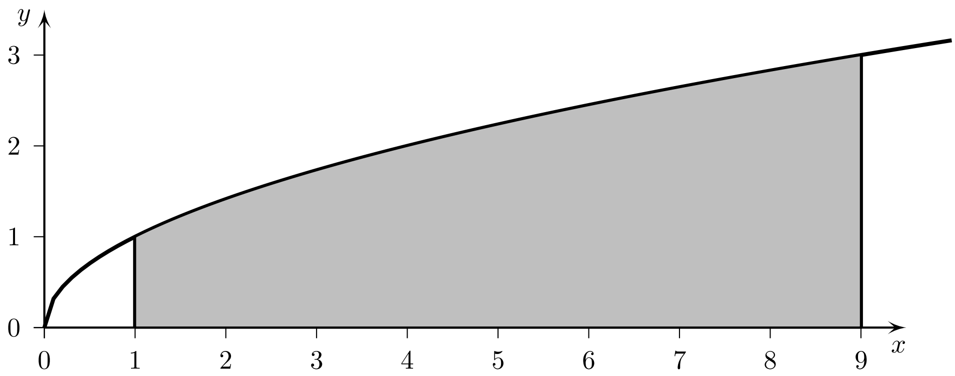
Riemannintegral, Ober- und Untersummen

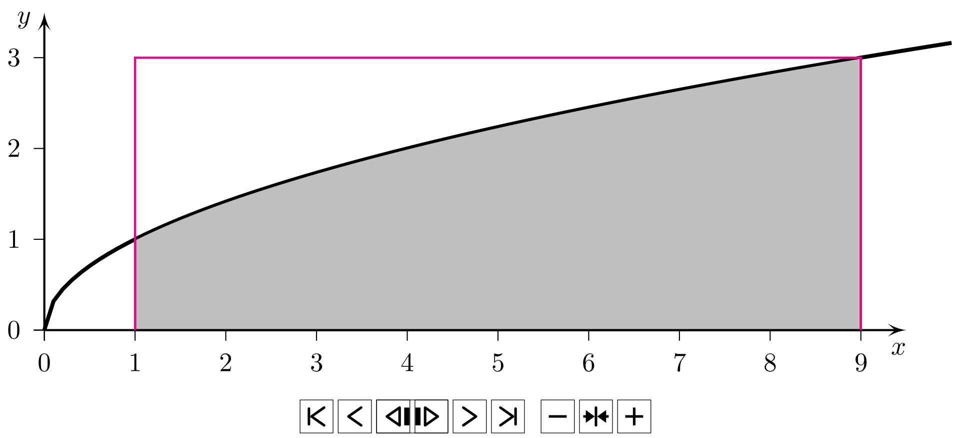
Wir betrachten hier die Funktion

$$f(x) = \sqrt{x}$$

und wollen die Fläche zwischen dem Funktionsgraphen und der x-Achse und den Parallelen zur y-Achse durch die Stellen $x = 1$ und $x = 9$ bestimmen:



Obersumme



Erläuterungen:

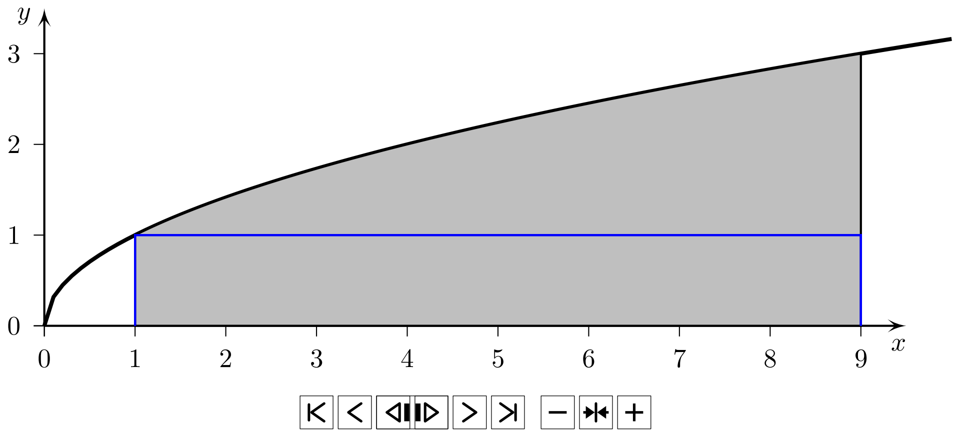
1. Wir nähern die Fläche mittels einer *Obersumme* O_n an. Dabei wird das Intervall $[1, 9]$ in n Teilintervalle unterteilt. Die Breite h der Teilintervalle bildet mit dem grössten Funktionswert in diesen Teilintervallen Rechtecke, deren Gesamtsumme grösser ist als die Fläche selbst.

2. Wir wählen $h = \frac{9-1}{n} = \frac{8}{n}$ konstant. Die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ ist streng monoton wachsend und damit befinden sich die grössten Funktionswerte am rechten Rand der Teilintervalle.

3. Mit dem >-Button wird die Anzahl Teilintervalle erhöht.

4. Je grösser die Zahl n umso besser wir die Fläche durch die Obersummen O_n von oben angenähert:
$$F < O_n$$

Untersummen



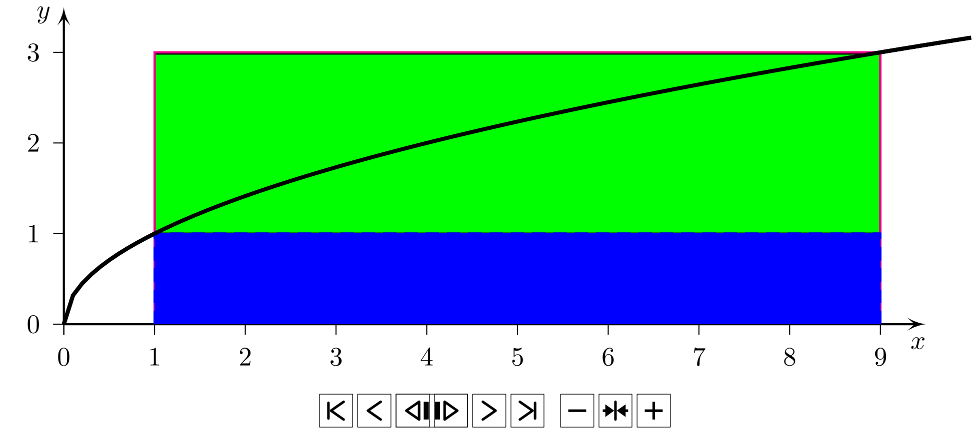
Erläuterungen:

1. Wir nähern die Fläche mittels einer *Untersumme* U_n an. Anstatt der grössten Funktionswerten wie bei der Obersumme wählen wir die kleinsten Funktionswerte. Dieser befindet sich am linken Rand der Teilintervalle. Diese bilden mit den Breiten der Teilintervalle Rechtecke, deren Gesamtsumme *kleiner* ist als die Fläche F selbst.

2. Mit dem >-Button wird die Anzahl Teilintervalle erhöht.

3. Je grösser die Zahl n umso besser wir die Fläche durch die Untersummen U_n von unten angenähert:
$$U_n < F$$

Differenz Ober- und Untersumme



Erläuterungen:

1. In der Animation sind nochmals die Ober- und Untersumme eingezeichnet. Das ist die grüne Fläche die Differenz dieser beiden Summen.

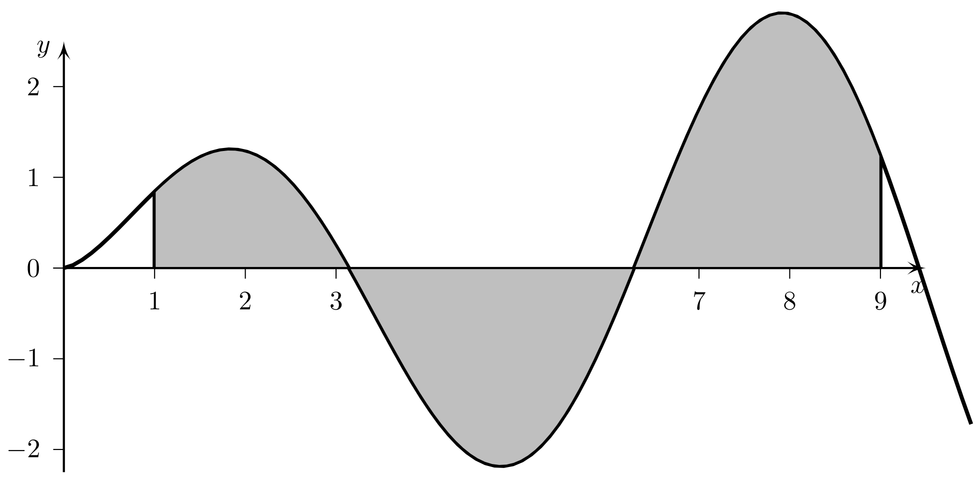
2. Mit zunehmendem n wir diese Differenz immer kleiner und gehen gegen 0 für $n \to \infty$. Dieser Grenzwert heisst bestimmtes Integral

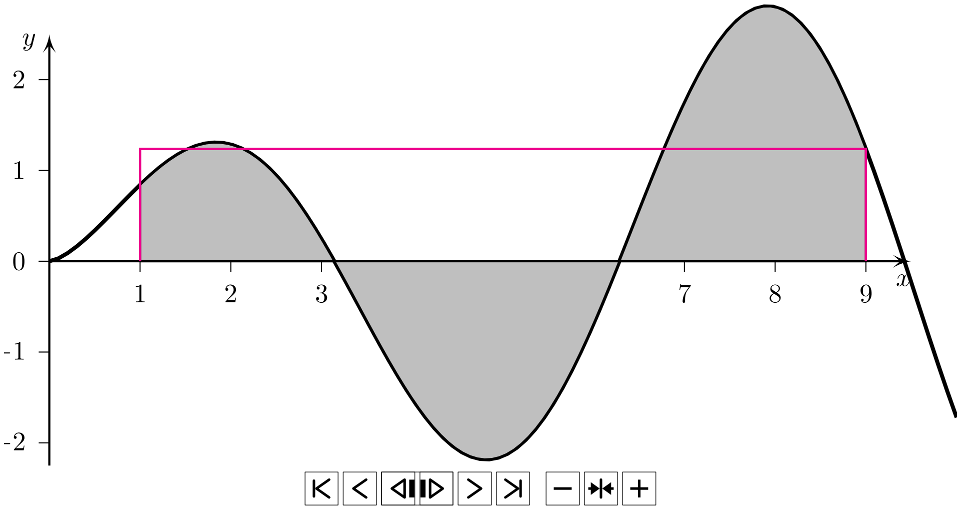
$$\int_1^9 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} O_n$$

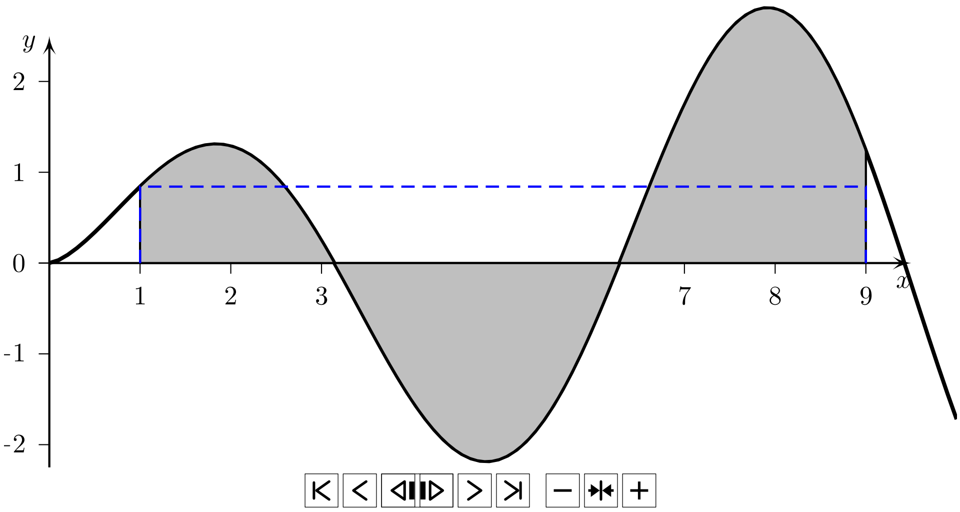
Noch ein Beispiel

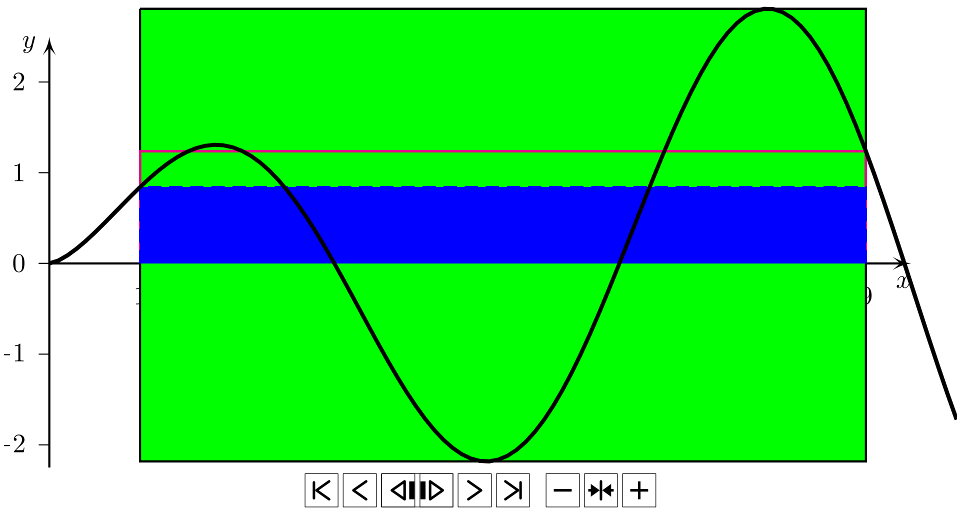
Das Intervall sei wieder $I = [1, 9]$

$$f(x) = \sqrt{x}\sin x$$




y
2
1
0
-1
-2
1
2
3
7
8
9
x


y
2
1
0
-1
-2
1
2
3
7
8
9
x


y
2
1
0
-1
-2
x