KANTON LUZERN
Bildungs- und Kulturdepartement

Kantonale Fachschaft Mathematik

Repetitionsaufgaben Bruchterme

Zusammengestellt von der Fachschaft Mathematik der Kantonsschule Willisau

Inhaltsverzeichnis

A) Vorbemerkung

Als Voraussetzungen für diese Repetitionsaufgaben sind insbesondere folgende Repetitionsaufgaben zwingend:

- Negative Zahlen/Brüche/Prozentrechnen, v.a. der Teil über Brüche, auf dem hier wesentlich aufgebaut wird
- Termumformungen

B) Lernziel

- Bruchterme vereinfachen können

C) Theorie

- **Erweitern:** Ein Bruchterm kann **erweitert** werden, indem **Zähler und Nenner mit demselben Term $\neq 0$ multipliziert** werden. Dabei ändert sich der Wert des Bruchterms nicht, die Bruchterme sind **äquivalent** bzw. **gleichwertig**.

  Beispiel: $\frac{a}{b} = \frac{ax}{bx}$, da der Bruchterm mit x erweitert wurde.

- **Kürzen:** Ein Bruchterm kann **gekürzt** werden, indem **Zähler und Nenner durch denselben Term $\neq 0$ dividiert** werden. Kürzen ist also die **Umkehroperation** zum Erweitern.

  Es wird in der Regel **immer verlangt,** dass Resultate mit einem komplett **gekürzten Bruchterm** angegeben werden.

  Beispiel: $\frac{45ab^2}{18a^2b^5} = \frac{5}{2ab^3}$, da der Bruchterm mit $9ab^2$ gekürzt werden konnte.

- **„Aus Differenzen und Summen kürzen nur die Dummen.“** lautet die **Merkregel.** Es dürfen ausschliesslich **Faktoren gekürzt** werden.

  Beispiele:
  a) $\frac{a+b}{bc} \neq \frac{a}{c}$ (b kann nicht gekürzt werden, weil b im Zähler kein Faktor ist, sondern ein Summand.)
  b) $\frac{mn+m}{n^2+2n+1} \overset{\text{faktorisieren}}{=} \frac{m(n+1)}{(n+1)^2} = \frac{m}{n+1}$ (Der Faktor $(n+1)$ kann gekürzt werden.)

- **Addition/Subtraktion:** Zwei Bruchterme werden folgendermassen addiert bzw. subtrahiert:
  1. Zähler und Nenner werden wenn möglich **faktorisiert**. Es wird wenn möglich **gekürzt.**
  2. Die Bruchterme werden **gleichnennrig** gemacht, indem geeignet erweitert wird. Es wird der kleinste/einfachste **gemeinsame Nenner (GN)** verwendet.
  3. Die **Zähler** werden **addiert bzw. subtrahiert**, der **Nenner** wird **beibehalten**.
  4. Der Zähler wird wenn möglich **faktorisiert**. Es wird wenn möglich **gekürzt**.

  Beispiele:
  a) $\frac{6z-5}{z^2-1} - \frac{5z+2}{2z+2} + \frac{3z}{4z-4} \overset{\text{faktorisieren}}{=} \frac{6z-5}{(z+1)(z-1)} - \frac{5z+2}{2(z+1)} + \frac{3z}{4(z-1)}$
  $\overset{\text{GN}=4(z+1)(z-1)}{=} \frac{4(6z-5)}{4(z+1)(z-1)} - \frac{2(z-1)(5z+2)}{4(z+1)(z-1)} + \frac{(z+1)\cdot 3z}{4(z+1)(z-1)} = \frac{24z-20-(2z-2)(5z+2)+3z^2+3z}{4(z+1)(z-1)}$
  $= \frac{24z-20-\left(10z^2+4z-10z-4\right)+3z^2+3z}{4(z+1)(z-1)} = \frac{-7z^2+33z-16}{4(z+1)(z-1)}$
  b) $\frac{6y}{x^2-y^2} + \frac{3x+6y}{x^2+3xy+2y^2} \overset{\text{faktorisieren}}{=} \frac{6y}{(x+y)(x-y)} + \frac{3(x+2y)}{(x+y)(x+2y)} \overset{\text{kürzen}}{=} \frac{6y}{(x+y)(x-y)} + \frac{3}{x+y}$
  $\overset{\text{GN}=(x+y)(x-y)}{=} \frac{6y}{(x+y)(x-y)} + \frac{3(x-y)}{(x+y)(x-y)} = \frac{6y+3x-3y}{(x+y)(x-y)} = \frac{3x+3y}{(x+y)(x-y)} \overset{\text{faktorisieren}}{=} \frac{3(x+y)}{(x+y)(x-y)} \overset{\text{kürzen}}{=} \frac{3}{x-y}$

- **Multiplikation:** Zwei Bruchterme werden folgendermassen multipliziert:
  1. Zähler und Nenner werden wenn möglich **faktorisiert**. Es wird wenn möglich **gekürzt.**
  2. Der neue Zähler wird durch **Zähler mal Zähler** berechnet.
  3. Der neue Nenner wird durch **Nenner mal Nenner** berechnet.
  Merke: Die Bruchterme müssen **nicht gleichnennrig** gemacht werden.

  Beispiel: $\frac{c}{m^2-n^2} \cdot \frac{5m+5n}{cm-cn} \overset{\text{faktorisieren}}{=} \frac{c}{(m+n)(m-n)} \cdot \frac{5(m+n)}{c(m-n)} \overset{\text{kürzen}}{=} \frac{1}{m-n} \cdot \frac{5}{m-n} = \frac{1\cdot 5}{(m-n)(m-n)} = \frac{5}{(m-n)^2}$

- **Division:** Zwei Bruchterme werden folgendermassen dividiert:
  1. Aus der Division wird eine **Multiplikation mit dem Kehrwert des zweiten Bruchterms** (Divisor) geschrieben.
  2. Die Multiplikation (vgl. oben) wird durchgeführt.

  Beispiel: $\frac{3x-12}{4x^2+12x+9} : \frac{x-4}{6x+9} = \frac{3x-12}{4x^2+12x+9} \cdot \frac{6x+9}{x+4} \overset{\text{faktorisieren}}{=} \frac{3(x-4)}{(2x+3)^2} \cdot \frac{3(2x+3)}{x+4} \overset{\text{kürzen}}{=} \frac{3}{(2x+3)} \cdot \frac{3}{1} = \frac{9}{2x+3}$

- **Doppelbrüche** sind nichts anderes als die **Division zweier Bruchterme**. Der **grösste Bruchstrich** wird **als Division umgeschrieben** und dann kommt die Division (vgl. oben) zur Anwendung.

  Beispiel: $\frac{\frac{ax}{b+c}}{\frac{ac^2}{-b-c}} = \frac{ax}{b+c} : \frac{ac^2}{-b-c} = \frac{ax}{b+c} \cdot \frac{-b-c}{ac^2} \overset{\text{faktorisieren}}{=} \frac{ax}{b+c} \cdot \frac{-(b+c)}{ac^2} \overset{\text{kürzen}}{=} \frac{x}{1} \cdot \frac{-1}{c^2} = -\frac{x}{c^2}$

  Merkregel: Es kann $\frac{\textbf{äussere}}{\textbf{innere}}$ gerechnet werden. Denn ax und $-b-c$ sind die „äusseren“, $b+c$ und ac^2 sind die „inneren“ Terme des Bruchterms, also $\frac{ax\cdot(-b-c)}{(b+c)\cdot ac^2}$.

D) Aufgaben

1. Kürzen Sie die folgenden Bruchterme so weit wie möglich:

a) $\frac{xy}{x^3y^2}$ b) $\frac{55a(b+1)}{77a^2}$ c) $\frac{42a^3b^5(a+b)^3}{28a^4b(a+b)^2}$ d) $\frac{x^3-x^2}{x}$

e) $\frac{2y+4}{y^2+4y+4}$ f) $\frac{4x^2-36}{3x^4-243}$ g) $\frac{5ax-25}{5-ax}$ h) $\frac{14a+7b}{12a^2+12ab+3b^2}$

2. Berechnen Sie:

a) $\frac{4}{2x}+\frac{5}{3x}-\frac{2}{6x}$ b) $\frac{2}{5a}-\frac{3}{10a}+\frac{7}{15a}$ c) $\frac{3a}{a^2-b^2}+\frac{3b}{a^2-b^2}$

d) $\frac{2x}{x-5}+\frac{3x}{x+5}$ e) $\frac{3}{2x-1}+\frac{4}{4x-2}-\frac{5}{6x-3}$ f) $\frac{5w}{w-3}-\frac{3w}{w+2}-\frac{2w-1}{w^2-w-6}$

g) $\frac{z+9}{z^2-1}-\frac{z+5}{z^2+z}$ h) $\frac{a+3b}{2a-2b}+\frac{4a-2b}{a+b}-\frac{3a+4b}{2a+2b}$ i) $\frac{3x^2+3}{x^4-1}+\frac{5}{2x^2-2}$

j) $\frac{ax}{ax-a}-\frac{bx}{b-bx}+\frac{2ab}{abx^2-ab}$ k) $\frac{2x-8}{x^2-x-12}-\frac{3x-6}{x^2-5x+6}$ l) $\frac{4x^2-4}{x^2-2x+1}-\frac{x^2-1}{x^2+2x+1}$

3. Berechnen Sie:

a) $\frac{a}{2x}\cdot\frac{x}{2a}$ b) $\frac{2a-2b}{x}\cdot\frac{y}{3a-3b}$ c) $\frac{4(x+2)}{5}\cdot\frac{25x}{x^2+4x+4}\cdot\frac{2x+4}{35}$

d) $\frac{15x^2}{2x^4-32}\cdot\frac{3x^2-12}{5x}$ e) $\frac{x^2+4x+4}{4z}\cdot\frac{8z}{x^2+5x+6}$ f) $\left(-\frac{x+y}{x-y}\right)^2\cdot\left(-\frac{x}{y}\right)$

4. Berechnen Sie:

a) $\frac{2x}{3}:\frac{3x}{4}$ b) $\frac{4x+12}{x-3}:(x+3)$ c) $\frac{48}{23b}:\left(-\frac{24b^5}{5}\right)$

d) $\frac{4x^2-12x+9}{9x^2+6x+1}:\frac{2ax-3a}{6x+2}$ e) $\dfrac{\frac{(x+3y)^2}{6xy}}{\frac{6y+2x}{xy}}$ f) $\dfrac{\frac{x^2+4x-12}{x^2-x-6}}{\frac{x^2+7x+6}{x^2-4x+3}}$

5. Berechnen Sie:

a) $\frac{4bd}{c}\cdot\left(\frac{3a}{4b}+\frac{15c}{6d}\right)$ b) $\left(\frac{36p^2}{7y^3}-\frac{24q^2}{5y^2}\right)\cdot\frac{35y^2}{6pq}$

c) $\left(\frac{x}{y}+\frac{a}{b}\right)\cdot\left(\frac{x}{y}-\frac{a}{b}\right)$ d) $\left(\frac{1}{x-y}-\frac{1}{x+y}\right)^2$

E) Musterlösungen

1. a) $\frac{xy}{x^3y^2} \overset{\text{kürzen mit } xy}{=} \frac{1}{x^2y}$

   b) $\frac{55a(b+1)}{77a^2} \overset{\text{kürzen mit } 11a}{=} \frac{5(b+1)}{7a}$

   c) $\frac{42a^3b^5(a+b)^3}{28a^4b(a+b)^2} \overset{\text{kürzen mit } 14a^3b(a+b)^2}{=} \frac{3b^4(a+b)}{2a}$

   d) $\frac{x^3-x^2}{x} \overset{\text{faktorisieren}}{=} \frac{x^2(x-1)}{x} \overset{\text{kürzen mit } x}{=} \frac{x(x-1)}{1} = x(x-1)$

   e) $\frac{2y+4}{y^2+4y+4} \overset{\text{faktorisieren}}{=} \frac{2(y+2)}{(y+2)^2} \overset{\text{kürzen mit } (y+2)}{=} \frac{2}{y+2}$

   f) $\frac{4x^2-36}{3x^4-243} \overset{\text{faktorisieren}}{=} \frac{4(x^2-9)}{3(x^4-81)} \overset{\text{faktorisieren}}{=} \frac{4(x+3)(x-3)}{3(x^2+9)(x^2-9)} \overset{\text{faktorisieren}}{=} \frac{4(x+3)(x-3)}{3(x^2+9)(x+3)(x-3)}$
   $\overset{\text{kürzen mit } (x+3)(x-3)}{=} \frac{4}{3(x^2+9)}$

   g) $\frac{5ax-25}{5-ax} \overset{\text{faktorisieren}}{=} \frac{5(ax-5)}{5-ax} \overset{\text{faktorisieren}}{=} \frac{5(ax-5)}{-1(ax-5)} \overset{\text{kürzen mit } (ax-5)}{=} \frac{5}{-1} = -5$

   h) $\frac{14a+7b}{12a^2+12ab+3b^2} \overset{\text{faktorisieren}}{=} \frac{7(2a+b)}{3(4a^2+4ab+b^2)} \overset{\text{faktorisieren}}{=} \frac{7(2a+b)}{3(2a+b)^2} \overset{\text{kürzen mit } (2a+b)}{=} \frac{7}{3(2a+b)}$

2. a) $\frac{4}{2x} + \frac{5}{3x} - \frac{2}{6x} \overset{\text{GN}=6x}{=} \frac{12}{6x} + \frac{10}{6x} - \frac{2}{6x} = \frac{20}{6x} \overset{\text{kürzen mit } 2}{=} \frac{10}{3x}$

   b) $\frac{2}{5a} - \frac{3}{10a} + \frac{7}{15a} \overset{\text{GN}=30a}{=} \frac{12}{30a} - \frac{9}{30a} + \frac{14}{30a} = \frac{17}{30a}$

   c) $\frac{3a}{a^2-b^2} + \frac{3b}{a^2-b^2} \overset{\text{faktorisieren}}{=} \frac{3a}{(a+b)(a-b)} + \frac{3b}{(a+b)(a-b)} \overset{\text{GN}=(a+b)(a-b)}{=} \frac{3a+3b}{(a+b)(a-b)} \overset{\text{faktorisieren}}{=} \frac{3(a+b)}{(a+b)(a-b)}$
   $\overset{\text{kürzen mit } (a+b)}{=} \frac{3}{a-b}$

   d) $\frac{2x}{x-5} + \frac{3x}{x+5} \overset{\text{GN}=(x+5)(x-5)}{=} \frac{2x(x+5)}{(x+5)(x-5)} + \frac{3x(x-5)}{(x+5)(x-5)} = \frac{2x^2+10x+(3x^2-15x)}{(x+5)(x-5)} = \frac{5x^2-5x}{(x+5)(x-5)}$
   $\overset{\text{faktorisieren}}{=} \frac{5x(x-1)}{(x+5)(x-5)}$

   e) $\frac{3}{2x-1} + \frac{4}{4x-2} - \frac{5}{6x-3} \overset{\text{faktorisieren}}{=} \frac{3}{2x-1} + \frac{4}{2(2x-1)} - \frac{5}{3(2x-1)}$
   $\overset{\text{kürzen mit } 2}{=} \frac{3}{2x-1} + \frac{2}{2x-1} - \frac{5}{3(2x-1)} \overset{\text{GN}=3(2x-1)}{=} \frac{9}{3(2x-1)} + \frac{6}{3(2x-1)} - \frac{5}{3(2x-1)} = \frac{10}{3(2x-1)}$

   f) $\frac{5w}{w-3} - \frac{3w}{w+2} - \frac{2w-1}{w^2-w-6} \overset{\text{faktorisieren}}{=} \frac{5w}{w-3} - \frac{3w}{w+2} - \frac{2w-1}{(w+2)(w-3)}$
   $\overset{\text{GN}=(w+2)(w-3)}{=} \frac{(w+2)\cdot 5w}{(w+2)(w-3)} - \frac{(w-3)\cdot 3w}{(w+2)(w-3)} - \frac{2w-1}{(w+2)(w-3)} = \frac{5w^2+10w-(3w^2-9w)-(2w-1)}{(w+2)(w-3)} = \frac{2w^2+17w+1}{(w+2)(w-3)}$

   g) $\frac{z+9}{z^2-1} - \frac{z+5}{z^2+z} \overset{\text{faktorisieren}}{=} \frac{z+9}{(z+1)(z-1)} - \frac{z+5}{z(z+1)} \overset{\text{GN}=z(z+1)(z-1)}{=} \frac{z(z+9)}{z(z+1)(z-1)} - \frac{(z-1)(z+5)}{z(z+1)(z-1)}$
   $= \frac{z^2+9z-(z^2+4z-5)}{z(z+1)(z-1)} = \frac{5z+5}{z(z+1)(z-1)} \overset{\text{faktorisieren}}{=} \frac{5(z+1)}{z(z+1)(z-1)} \overset{\text{kürzen mit } (z+1)}{=} \frac{5}{z(z-1)}$

   h) $\frac{a+3b}{2a-2b} + \frac{4a-2b}{a+b} - \frac{3a+4b}{2a+2b} \overset{\text{faktorisieren}}{=} \frac{a+3b}{2(a-b)} + \frac{2(2a-b)}{a+b} - \frac{3a+4b}{2(a+b)}$
   $\overset{\text{GN}=2(a-b)(a+b)}{=} \frac{(a+b)(a+3b)}{2(a-b)(a+b)} + \frac{2(a-b)\cdot 2(2a-b)}{2(a-b)(a+b)} - \frac{(a-b)(3a+4b)}{2(a-b)(a+b)}$
   $= \frac{a^2+4ab+3b^2+4(2a^2-3ab+b^2)-(3a^2+ab-4b^2)}{2(a-b)(a+b)} = \frac{6a^2-9ab+11b^2}{2(a-b)(a+b)}$

   i) $\frac{3x^2+3}{x^4-1} + \frac{5}{2x^2-2} \overset{\text{faktorisieren}}{=} \frac{3(x^2+1)}{(x^2+1)(x^2-1)} + \frac{5}{2(x^2-1)} \overset{\text{kürzen mit } (x^2+1)\text{, faktorisieren}}{=} \frac{3}{(x+1)(x-1)} + \frac{5}{2(x+1)(x-1)}$
   $\overset{\text{GN}=2(x+1)(x-1)}{=} \frac{6}{2(x+1)(x-1)} + \frac{5}{2(x+1)(x-1)} = \frac{11}{2(x+1)(x-1)}$

j) $\frac{ax}{ax-a}-\frac{bx}{b-bx}+\frac{2ab}{abx^2-ab} \overset{\text{faktorisieren}}{=} \frac{ax}{a(x-1)}-\frac{bx}{b(1-x)}+\frac{2ab}{ab(x^2-1)}$

$\overset{\text{kürzen mit } a \text{ bzw. } b \text{ bzw. } ab}{=} \frac{x}{x-1}-\frac{x}{1-x}+\frac{2}{(x^2-1)} \overset{\text{faktorisieren}}{=} \frac{x}{x-1}-\frac{x}{-(x-1)}+\frac{2}{(x+1)(x-1)}$

$\overset{\text{GN}=(x+1)(x-1)}{=} \frac{(x+1)x}{(x+1)(x-1)}+\frac{(x+1)x}{(x+1)(x-1)}+\frac{2}{(x+1)(x-1)}=\frac{x^2+x+x^2+x+2}{(x+1)(x-1)}=\frac{2x^2+2x+2}{(x+1)(x-1)} \overset{\text{faktorisieren}}{=} \frac{2(x^2+x+1)}{(x+1)(x-1)}$

k) $\frac{2x-8}{x^2-x-12}-\frac{3x-6}{x^2-5x+6} \overset{\text{faktorisieren}}{=} \frac{2(x-4)}{(x-4)(x+3)}-\frac{3(x-2)}{(x-2)(x-3)} \overset{\text{kürzen mit } (x-4) \text{ bzw. } (x-2)}{=} \frac{2}{x+3}-\frac{3}{x-3}$

$\overset{\text{GN}=(x+3)(x-3)}{=} \frac{(x-3)\cdot 2}{(x+3)(x-3)}-\frac{(x+3)\cdot 3}{(x+3)(x-3)}=\frac{2x-6-(3x+9)}{(x+3)(x-3)}=\frac{-x-15}{(x+3)(x-3)}$

l) $\frac{4x^2-4}{x^2-2x+1}-\frac{x^2-1}{x^2+2x+1} \overset{\text{faktorisieren}}{=} \frac{4(x^2-1)}{(x-1)^2}-\frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)^2} \overset{\text{faktorisieren, kürzen mit } (x+1)}{=} \frac{4(x+1)(x-1)}{(x-1)^2}-\frac{x-1}{x+1}$

$\overset{\text{kürzen mit } (x-1)}{=} \frac{4(x+1)}{x-1}-\frac{x-1}{x+1} \overset{\text{GN}=(x+1)(x-1)}{=} \frac{4(x+1)^2}{(x+1)(x-1)}-\frac{(x-1)^2}{(x+1)(x-1)}=\frac{4(x^2+2x+1)-(x^2-2x+1)}{(x+1)(x-1)}$

$=\frac{3x^2+10x+3}{(x+1)(x-1)}$

3. a) $\frac{a}{2x}\cdot\frac{x}{2a} \overset{\text{kürzen mit } a \text{ und } x}{=} \frac{1\cdot 1}{2\cdot 2}=\frac{1}{4}$

b) $\frac{2a-2b}{x}\cdot\frac{y}{3a-3b} \overset{\text{faktorisieren}}{=} \frac{2(a-b)}{x}\cdot\frac{y}{3(a-b)} \overset{\text{kürzen mit } (a-b)}{=} \frac{2}{x}\cdot\frac{y}{3}=\frac{2y}{3x}$

c) $\frac{4(x+2)}{5}\cdot\frac{25x}{x^2+4x+4}\cdot\frac{2x+4}{35} \overset{\text{faktorisieren}}{=} \frac{4(x+2)}{5}\cdot\frac{25x}{(x+2)^2}\cdot\frac{2(x+2)}{35} \overset{\text{kürzen mit } 25(x+2)^2}{=} \frac{4}{1}\cdot\frac{x}{1}\cdot\frac{2}{7}=\frac{8x}{7}$

d) $\frac{15x^2}{2x^4-32}\cdot\frac{3x^2-12}{5x} \overset{\text{faktorisieren}}{=} \frac{15x^2}{2(x^4-16)}\cdot\frac{3(x^2-4)}{5x} \overset{\text{faktorisieren}}{=} \frac{15x^2}{2(x^2+4)(x^2-4)}\cdot\frac{3(x+2)(x-2)}{5x}$

$\overset{\text{faktorisieren}}{=} \frac{15x^2}{2(x^2+4)(x+2)(x-2)}\cdot\frac{3(x+2)(x-2)}{5x} \overset{\text{kürzen mit } 5x(x+2)(x-2)}{=} \frac{3x}{2(x^2+4)}\cdot\frac{3}{1}=\frac{9x}{2(x^2+4)}$

e) $\frac{x^2+4x+4}{4z}\cdot\frac{8z}{x^2+5x+6} \overset{\text{faktorisieren}}{=} \frac{(x+2)^2}{4z}\cdot\frac{8z}{(x+2)(x+3)} \overset{\text{kürzen mit } 4z(x+2)}{=} \frac{x+2}{1}\cdot\frac{2}{x+3}=\frac{2(x+2)}{x+3}$

f) $\left(-\frac{x+y}{x-y}\right)^2\cdot\left(-\frac{x}{y}\right)=\frac{(x+y)^2}{(x-y)^2}\cdot\left(-\frac{x}{y}\right)=-\frac{x(x+y)^2}{y(x-y)^2}$

4. a) $\frac{2x}{3}:\frac{3x}{4}=\frac{2x}{3}\cdot\frac{4}{3x} \overset{\text{kürzen mit } x}{=} \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}=\frac{8}{9}$

b) $\frac{4x+12}{x-3}:(x+3)=\frac{4x+12}{x-3}\cdot\frac{1}{x+3} \overset{\text{faktorisieren}}{=} \frac{4(x+3)}{x-3}\cdot\frac{1}{x+3} \overset{\text{kürzen mit } (x+3)}{=} \frac{4}{x-3}\cdot\frac{1}{1}=\frac{4}{x-3}$

c) $\frac{48}{23b}:\left(-\frac{24b^5}{5}\right)=\frac{48}{23b}\cdot\left(-\frac{5}{24b^5}\right) \overset{\text{kürzen mit } 24}{=} \frac{2}{23b}\cdot\left(-\frac{5}{b^5}\right)=-\frac{10}{23b^6}$

d) $\frac{4x^2-12x+9}{9x^2+6x+1}:\frac{2ax-3a}{6x+2}=\frac{4x^2-12x+9}{9x^2+6x+1}\cdot\frac{6x+2}{2ax-3a} \overset{\text{faktorisieren}}{=} \frac{(2x-3)^2}{(3x+1)^2}\cdot\frac{2(3x+1)}{a(2x-3)} \overset{\text{kürzen mit } (2x-3)(3x+1)}{=} \frac{2x-3}{3x+1}\cdot\frac{2}{a}$

$=\frac{2(2x-3)}{a(3x+1)}$

e) $\dfrac{\frac{(x+3y)^2}{6xy}}{\frac{6y+2x}{xy}}=\frac{(x+3y)^2}{6xy}:\frac{6y+2x}{xy}=\frac{(x+3y)^2}{6xy}\cdot\frac{xy}{6y+2x} \overset{\text{faktorisieren}}{=} \frac{(x+3y)^2}{6xy}\cdot\frac{xy}{2(3y+x)}$

$\overset{\text{kürzen mit } xy(x+3y)}{=} \frac{x+3y}{6}\cdot\frac{1}{2}=\frac{x+3y}{12}$

f) $\dfrac{\frac{x^2+4x-12}{x^2-x-6}}{\frac{x^2+7x+6}{x^2-4x+3}}=\frac{x^2+4x-12}{x^2-x-6}:\frac{x^2+7x+6}{x^2-4x+3}=\frac{x^2+4x-12}{x^2-x-6}\cdot\frac{x^2-4x+3}{x^2+7x+6} \overset{\text{faktorisieren}}{=} \frac{(x+6)(x-2)}{(x-3)(x+2)}\cdot\frac{(x-3)(x-1)}{(x+6)(x+1)}$

$\overset{\text{kürzen mit } (x+6)(x-3)}{=} \frac{x-2}{x+2}\cdot\frac{x-1}{x+1}=\frac{(x-2)(x-1)}{(x+2)(x+1)}$

5. a) $\frac{4bd}{c}\cdot\left(\frac{3a}{4b}+\frac{15c}{6d}\right)\overset{\text{kürzen mit 3}}{=}\frac{4bd}{c}\cdot\left(\frac{3a}{4b}+\frac{5c}{2d}\right)\overset{\text{GN}=4bd}{=}\frac{4bd}{c}\cdot\left(\frac{3ad}{4bd}+\frac{10bc}{4bd}\right)=\frac{4bd}{c}\cdot\frac{3ad+10bc}{4bd}$

$\overset{\text{kürzen mit }4bd}{=}\frac{1}{c}\cdot\frac{3ad+10bc}{1}=\frac{3ad+10bc}{c}$

b) $\left(\frac{36p^2}{7y^3}-\frac{24q^2}{5y^2}\right)\cdot\frac{35y^2}{6pq}\overset{\text{GN}=35y^3}{=}\left(\frac{180p^2}{35y^3}-\frac{168q^2y}{35y^3}\right)\cdot\frac{35y^2}{6pq}=\frac{180p^2-168q^2y}{35y^3}\cdot\frac{35y^2}{6pq}$

$\overset{\text{faktorisieren}}{=}\frac{12(15p^2-14q^2y)}{35y^3}\cdot\frac{35y^2}{6pq}\overset{\text{kürzen mit }6\cdot35y^2}{=}\frac{2(15p^2-14q^2y)}{y}\cdot\frac{1}{pq}=\frac{2(15p^2-14q^2y)}{pqy}$

c) $\left(\frac{x}{y}+\frac{a}{b}\right)\cdot\left(\frac{x}{y}-\frac{a}{b}\right)\overset{\text{GN}=by}{=}\left(\frac{bx}{by}+\frac{ay}{by}\right)\cdot\left(\frac{bx}{by}-\frac{ay}{by}\right)=\left(\frac{bx+ay}{by}\right)\cdot\left(\frac{bx-ay}{by}\right)=\frac{(bx+ay)(bx-ay)}{b^2y^2}$

Variante: $\left(\frac{x}{y}+\frac{a}{b}\right)\cdot\left(\frac{x}{y}-\frac{a}{b}\right)\overset{\text{3. binomische Formel}}{=}\frac{x^2}{y^2}-\frac{a^2}{b^2}\overset{\text{GN}=b^2y^2}{=}\frac{b^2x^2}{a^2y^2}-\frac{a^2y^2}{b^2y^2}=\frac{b^2x^2-a^2y^2}{b^2y^2}$

$\overset{\text{faktorisieren}}{=}\frac{(bx+ay)(bx-ay)}{b^2y^2}$

d) $\left(\frac{1}{x-y}-\frac{1}{x+y}\right)^2\overset{\text{GN}=(x-y)(x+y)}{=}\left(\frac{x+y}{(x-y)(x+y)}-\frac{(x-y)}{(x-y)(x+y)}\right)^2=\left(\frac{x+y-(x-y)}{(x-y)(x+y)}\right)^2=\left(\frac{2y}{(x-y)(x+y)}\right)^2$

$=\frac{4y^2}{(x-y)^2(x+y)^2}$

Variante: $\left(\frac{1}{x-y}-\frac{1}{x+y}\right)^2\overset{\text{2. binomische Formel}}{=}\frac{1}{(x-y)^2}-\frac{2}{(x-y)(x+y)}+\frac{1}{(x+y)^2}$

$\overset{\text{GN}=(x-y)^2(x+y)^2}{=}\frac{(x+y)^2}{(x-y)^2(x+y)^2}-\frac{2(x-y)(x+y)}{(x-y)^2(x+y)^2}+\frac{(x-y)^2}{(x-y)^2(x+y)^2}=\frac{x^2+2xy+y^2-2(x^2-y^2)+x^2-2xy+y^2}{(x-y)^2(x+y)^2}$

$=\frac{4y^2}{(x-y)^2(x+y)^2}$