KANTON LUZERN
Bildungs- und Kulturdepartement

Kantonale Fachschaft Mathematik

Repetitionsaufgaben: Bruchtermgleichungen

Zusammengestellt von Caroline Schaepman, KSR

Lernziele:
- Eine Bruchgleichung erkennen und durch Multiplikation mit dem Hauptnenner umformen können; die Definitionsmenge und zutreffende Lösungen angeben können.
- Wissen, warum eine Lösungskontrolle notwendig ist.
- Bruchtermgleichungen von Hand auflösen können.
- Bruchtermgleichungen mit Parametern nach einer Variablen auflösen können.
- Einfache Textaufgaben, die auf Bruchtermgleichungen führen, lösen können.

A. Was ist eine Bruchtermgleichung?

Eine Gleichung, bei der eine Variable *x* im Nenner vorkommt, ohne dass man sie kürzen kann, heisst Bruchtermgleichung oder kurz : Bruchgleichung.

Für das Auflösen einer Bruchgleichung geht man nach folgendem Ablauf vor:

1. Definitionsbereich (**D**) bestimmen
2. Zähler und Nenner faktorisieren, falls möglich!
3. kgv und damit Hauptnenner (HN) der vorkommenden Bruchterme bestimmen
4. Beide Seiten mit HN multiplizieren, damit die Nenner wegfallen und die Brüche verschwinden
5. Auflösen nach der Unbekannten (in der Regel: *x)*
6. Lösung überprüfen, ob in **D** enthalten
7. Lösungsmenge (**L)** aufschreiben

Beispiel : $\frac{5}{x-1}=\frac{6}{x+2}$

Definitionsbereich bestimmen:
Die *x* bestimmen, für die der oder die Nenner, in denen *x* enthalten ist, Null ergibt
$x-1=0 \Rightarrow x=1,\qquad x+2=0 \Rightarrow x=-2\qquad \Rightarrow$ **D** = **R**\{-2,1}

Dann beginnt das Auflösen der Gleichung :

$\frac{5}{x-1} = \frac{6}{x+2}$	$\mid \cdot (x-1)(x+2)$	Multiplikation mit dem Hauptnenner (HN)
$\frac{5(x-1)(x+2)}{x-1} = \frac{6(x-1)(x+2)}{x+2}$		Kürzen (dieser Schritt kann weggelassen werden, indem man direkt zum nächsten geht). Bei allen weiteren Aufgaben wird die kurze Variante aufgezeigt.
$5(x+2) = 6(x-1)$		Ausmultiplizieren
$5x+10 = 6x-6$	$\mid -5x+6$	
$x = 16$		

Kontrolle, ob $x \in$ D :
D = **R**\{-2,1}, also sind -2 und 1 verboten; hier hat man x=16 erhalten, also gilt $x \in$ D $\Rightarrow$ **L**={16}

B. Aufgaben Bruchgleichungen

Die folgenden Aufgaben sollen nach dem beschriebenen Ablauf gelöst werden. Sie sind in vier Schwierigkeitsgrade eingeteilt.
Im Anschluss an alle Aufgaben dieser Aufgabensammlung finden Sie die Lösungen dazu. Einige davon sind ausführlich, d.h. Schritt für Schritt, aufgeführt. Sie sehen an der Aufgabenstellung, ob eine ausführliche Lösung existiert oder nur eine Kurzlösung. Steht **(AL)** hinter der Aufgabe, so ist eine **ausführliche Lösung** vorhanden, ansonsten nur eine Kurzlösung. Diese Aufgaben werden empfohlen und sind fett gedruckt.

Schwierigkeitsgrad 1: Die Variable kommt im Nenner alleine oder in einem Produkt vor.

Schwierigkeitsgrad 2: Die Variable kommt im Nenner in einer Summe und/oder Differenz vor.

Schwierigkeitsgrad 3: Die Variable kommt im Nenner in einer Summe und/oder Differenz vor und man kann einen gemeinsamen Faktor ausklammern.

Schwierigkeitsgrad 4: Die Variable kommt im Nenner in einer Summe und/oder Differenz vor und man kann einen gemeinsamen Faktor ausklammern oder man muss die binomischen Formeln anwenden.

Schwierigkeitsgrad 1

1.)

a) $\frac{7}{3x} = \frac{5}{6x} - \frac{1}{4}$ (AL)

b) $\frac{5}{6x} - \frac{7}{15x} = \frac{1}{9}$ (AL)

c) $\frac{11}{4x} + \frac{11}{12x} = \frac{11}{9}$ (AL)

d) $\frac{5}{2x} + 1 = \frac{3}{x}$

e) $\frac{6}{x} + 1 = \frac{9}{x}$

f) $\frac{2}{3x} + \frac{1}{2x} + 1 = \frac{1}{6x}$

g) $\frac{4}{10x} + 1 = \frac{9}{10x} - \frac{1}{5x}$

h) $\frac{3}{2x} - \frac{2}{3} = \frac{5}{6x}$

i) $\frac{3}{4x} - \frac{1}{6x} = \frac{2}{3}$

j) $\frac{11}{5} - \frac{x-20}{2x} = \frac{2x-1}{3x}$

k) $\frac{2x-4}{x} = \frac{8x-7}{x}$

Schwierigkeitsgrad 2

2.)

a) $\frac{4}{x+5}=\frac{1}{3}$ (AL) **b)** $\frac{2x+4}{3x-5}=\frac{5}{2}$ (AL) **c)** $\frac{3}{x-2}=\frac{12}{x+7}$ (AL)

d) $\frac{2x}{x+1}+\frac{3}{2x}=2-\frac{1}{x}$ (AL) **e)** $\frac{4-x}{3x-1}=\frac{2x+3}{3x-1}$ (AL) **f)** $\frac{2(x-2)}{x-5}=\frac{2x-4}{x-5}$ (AL)

g) $\frac{42}{x-2}-3=4$ h) $\frac{12}{x+5}+3=4$ i) $3-\frac{3}{x-2}=2$

j) $\frac{x-5}{x+3}=\frac{x-6}{x-2}$ k) $\frac{4x+7}{3x+4}=\frac{8x+11}{6x+6}$ l) $\frac{3x+14}{2x-4}=\frac{3x+2}{2x-7}$

Schwierigkeitsgrad 3

3.)

a) $\frac{4}{x+1}=\frac{7}{4x+4}+\frac{3}{2x-2}$ (AL) **b)** $\frac{20x+2}{6x+6}-1=\frac{6x-4}{2x+2}$ (AL)

c) $\frac{11x-2}{2x+2}-\frac{3x-1}{x+3}=\frac{5x+15}{2x+6}$ (AL) d) $\frac{3x-5}{4x-8}+\frac{x+1}{2x-4}=\frac{2x+3}{3x-6}$

e) $\frac{2x+12}{x-3}-\frac{4x-30}{3x-9}=\frac{3x-6}{x-3}$ f) $\frac{3x-3}{x-8}+4=\frac{2x+2}{x-8}+\frac{3x+3}{2x-16}$

g) $\frac{2x}{x-5}=\frac{x-24}{5-x}$ h) $\frac{x}{x-3}=\frac{x+1}{9-3x}$

i) $\frac{x}{2x-8}+\frac{x-6}{x-4}=\frac{3}{2}$

Schwierigkeitsgrad 4

4.)

a) $\frac{1}{x-2}=\frac{9}{x^2-4}$ (AL) **b)** $\frac{2}{x-3}+\frac{2}{x+3}=\frac{24}{x^2-9}$ (AL)

c) $\frac{6}{4x^2+12x+9}+\frac{4x}{2x+3}=2$ (AL) d) $\frac{2}{x+2}-\frac{1}{x-2}=\frac{7}{4-x^2}$

e) $\frac{52}{4x+5}-\frac{15}{4x-5}+\frac{39}{16x^2-25}=0$ f) $\frac{3x-6}{x+2}+\frac{7x+8}{x^2-4}=\frac{3x-4}{x-2}$

g) $\frac{5-15x}{x^2-25}+\frac{2x-3}{x-5}=\frac{2x+1}{x+5}$ h) $\frac{35}{9x^2-16}+\frac{3}{3x+4}=\frac{14}{3x-4}$

C. Bruchgleichungen mit Parametern

In einer Bruchgleichung können neben der Unbekannten *x* weitere Unbekannte auftreten, nach denen die Gleichung aber nicht aufgelöst werden soll. Diese weiteren Unbekannten heissen Parameter („Platzhalter"). Das berechnete x soll mit Hilfe dieser Parameter angegeben werden. Das Vorgehen beim Auflösen ist gleich wie bei „normalen" Bruchgleichungen.

Beispiel : $x+\frac{p}{xp}=1$

Definitionsbereich bestimmen:
Die *x* bestimmen, für die der oder die Nenner, in denen *x* enthalten ist, Null ergibt

$xp=0 \quad \Rightarrow x=0$ $\qquad \Rightarrow$ **D** = **R**\{0}

Dann beginnt das Auflösen der Gleichung :

$\frac{1}{x}+\frac{p}{xp}=$	1	$\vert \cdot xp$	Multiplikation mit dem Hauptnenner (HN)
$p+p=$	xp		
$2p=$	xp	$\vert : p$	
$2=$	x		

$x \in$ **D** $\qquad \Rightarrow$ **L**={2 ; $p \neq 0$} $\qquad$ Bedingung(en) für den Parameter auflisten

Aufgaben

1) $\frac{1}{x-t}=1-\frac{1}{t}$ (AL)

2) $\frac{h}{b}=\frac{x-h}{x}$ (AL)

3) $\frac{3x+p}{3x-1}=\frac{x+1}{x-p}$ (AL)

4) $\frac{1+x}{1-x}=a$

5) $x+\frac{1}{m}=\frac{1}{m-1}$

6) $\frac{7}{t^2+tx}-\frac{t+4}{tx}+\frac{3t-2}{tx+x^2}=0$ (AL)

7) $\frac{2(x-c)}{a^2+ab-ac-bc}-\frac{x+c}{a^2+ab+ac+bc}=\frac{1}{a+b}$

(AL)

8) $\frac{g-hx}{gx-g}-\frac{x+1}{x-1}=1$

D. Textaufgaben zu Bruchgleichungen

Das Vorgehen beim Lösen von Textaufgaben mit Bruchgleichungen ist dasselbe wie zum Lösen von allgemeinen Textaufgaben:

1. **Schritt: Aufgabe genau lesen und verstehen**
2. **Schritt: *Genaue* Wahl der Unbekannten**
3. **Schritt: Aufstellen der Gleichung. Wichtig: Masseinheiten aufschreiben !**
4. **Schritt: Lösen der Gleichung**
5. **Schritt: Prüfen der Lösung**
6. **Schritt: Antwortsatz**

Bei Textaufgaben zu Bruchgleichungen gibt es drei Arten, die immer wieder auftauchen:

- Aufgaben, in denen eine Zahl gesucht wird: Zahlenterme
- Leistungsaufgaben
- Geschwindigkeitsaufgaben

Aufgaben

1) Ein Bruch hat den Wert $\frac{17}{18}$. Welche Zahl muss man vom Zähler subtrahieren und zum Nenner addieren, damit sein Wert $\frac{2}{3}$ wird ?

2) Ein leeres Schwimmbecken kann durch die Zuflussleitung in 15 Stunden gefüllt werden. Ist das Becken voll, so dauert es 20 Stunden, um das Wasser wieder ablaufen zu lassen. Das Becken ist leer. Die Besitzerin will es füllen, vergisst jedoch, den Ablauf zu schliessen.
Wie lange dauert es, bis das Schwimmbecken trotzdem voll ist?

3) Zum Entladen eines Getreideschiffes benötigen zwei Fördergebläse drei Stunden. Das eine Gebläse arbeitet doppelt so schnell wie das andere. Wie viele Stunden benötigt jedes Gebläse alleine?

4) In einem Braunkohletagebau haben zwei Bagger zusammen 85 Tage benötigt, um die Erde über der Braunkohle zu entfernen. Der kleinere der beiden schafft 40% der Leistung des grösseren. Wie viele Tage hätte jeder Bagger benötigt, wenn er jeweils allein gearbeitet hätte?

5) Läufer A benötigt für eine 25 km lange Strecke 30 Minuten mehr, als Läufer B für 15 km braucht. Die Geschwindigkeit von A ist um 2.5 km/h grösser als die von B. Berechne die Laufzeit von A.

E. Lösungen aller Aufgaben

Lösungen Aufgaben Bruchgleichungen

Schwierigkeitsgrad 1

1a) $\frac{7}{3x}=\frac{5}{6x}-\frac{1}{4}$

Definitionsbereich bestimmen:
$3x=0 \Rightarrow x=0$, $6x=0 \Rightarrow x=0$ $\Rightarrow$ **D** = **R**\{0}

$$\begin{aligned} \frac{7}{3x} &= \frac{5}{6x}-\frac{1}{4} && \mid \cdot 12x \\ 28 &= 10-3x && \mid -10 \\ 18 &= -3x && \mid :(-3) \\ x &= -6 \end{aligned}$$

Kontrolle, ob $x \in$ **D** :
$-6 \in$ **D**=**R**\{0} $\Rightarrow$ **L**={-6}

1b) $\frac{5}{6x}-\frac{7}{15x}=\frac{1}{9}$

Definitionsbereich bestimmen:
$6x=0 \Rightarrow x=0$, $15x=0 \Rightarrow x=0$ $\Rightarrow$ **D** = **R**\{0}

$$\begin{aligned} \frac{5}{6x}-\frac{7}{15x} &= \frac{1}{9} && \mid \cdot 90x \\ 75-42 &= 10x \\ 33 &= 10x && \mid :10 \\ x &= 3.3 \end{aligned}$$

Kontrolle, ob $x \in$ **D** :
$3.3 \in$ **D**=**R**\{0} $\Rightarrow$ **L**={3.3}

1c) $\frac{11}{4x}+\frac{11}{12x}=\frac{11}{9}$

Definitionsbereich bestimmen:

$4x=0 \Rightarrow x=0$, $12x=0 \Rightarrow x=0$ $\Rightarrow$ **D** = **R**\{0}

$$\begin{aligned} \frac{11}{4x}+\frac{11}{12x} &= \frac{11}{9} && |\cdot 36x \\ 99+33 &= 44x \\ 132 &= 44x && |:44 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Kontrolle, ob $x \in$ **D** :

$3 \in$ **D**=**R**\{0} $\Rightarrow$ **L**={3}

1.	**d)**	**D** = **R**\{0}	**L**={0.5}
	e)	**D** = **R**\{0}	**L**={3}
	f)	**D** = **R**\{0}	**L**={-1}
	g)	**D** = **R**\{0}	**L**={0.3}
	h)	**D** = **R**\{0}	**L**={1}
	i)	**D** = **R**\{0}	**L**={$\frac{7}{8}$}
	j)	**D** = **R**\{0}	**L**={-10}
	k)	**D** = **R**\{0}	**L**={0.5}

Lösungen - Schwierigkeitsgrad 2

2a) $\frac{4}{x+5}=\frac{1}{3}$

Definitionsbereich bestimmen:

$x+5=0 \Rightarrow x=-5$ $\Rightarrow$ **D** = **R**\{-5}

$$\begin{aligned} \frac{4}{x+5} &= \frac{1}{3} && |\cdot 3(x+5) \\ 12 &= x+5 && |-5 \\ x &= 7 \end{aligned}$$

Kontrolle, ob $x \in$ **D** :

$7 \in$ **D**=**R**\{-5} $\Rightarrow$ **L**={7}

2b) $\frac{2x+4}{3x-5}=\frac{5}{2}$

Definitionsbereich bestimmen:

$3x-5=0 \Rightarrow x=\frac{5}{3}$ $\Rightarrow$ **D** = **R**\{$\frac{5}{3}$}

$$\begin{aligned} \frac{2x+4}{3x-5} &= \frac{5}{2} && |\cdot 2(3x-5) \\ 2(2x+4) &= 5(3x-5) \\ 4x+8 &= 15x-25 && |-4x+25 \\ 33 &= 11x && |:11 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Kontrolle, ob $x \in$ **D** :

$3 \in$ **D** = **R**\{$\frac{5}{3}$} $\Rightarrow$ **L**={3}

2c) $\frac{3}{x-2}=\frac{12}{x+7}$

Definitionsbereich bestimmen:

$x-2=0 \Rightarrow x=2,\quad x+7=0 \Rightarrow x=-7$ $\Rightarrow$ **D** = **R**\{-7,2}

$$\begin{aligned} \frac{3}{x-2} &= \frac{12}{x+7} && |\cdot (x-2)(x+7) \\ 3(x+7) &= 12(x-2) \\ 3x+21 &= 12x-24 && |-3x+24 \\ 45 &= 9x && |:9 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Kontrolle, ob $x \in$ **D** :

$5 \in$ **D** = **R**\{-7,2} $\Rightarrow$ **L**={5}

2d) $\frac{2x}{x+1}+\frac{3}{2x}=2-\frac{1}{x}$

Definitionsbereich bestimmen:

$x+1=0 \Rightarrow x=-1,\ \ 2x=x=0 \Rightarrow x=0$ $\Rightarrow$ **D** = **R**\{-1,0}

$$\begin{aligned}
\frac{2x}{x+1}+\frac{3}{2x} &= 2-\frac{1}{x} && |\cdot 2x(x+1)\\
4x^2+3(x+1) &= 4x\ \ (x+1)-2(x+1) &&\\
4x^2+3x+3 &= 4x^2+4x-2x-2 && |-4x^2\\
3x+3 &= 2x-2 && |-2x-3\\
x &= -5 &&
\end{aligned}$$

Kontrolle, ob $x\in$ **D** :

$-5\in$ **D** = **R**\{-1,0} $\Rightarrow$ **L**={-5}

2e) $\frac{4-x}{3x-1}=\frac{2x+3}{3x-1}$

Definitionsbereich bestimmen:

$3x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{3}$ $\Rightarrow$ **D** = **R**\{$\frac{1}{3}$}

$$\begin{aligned}
\frac{4-x}{3x-1} &= \frac{2x+3}{3x-1} && |\cdot(3x-1)\\
4-x &= 2x+3 && |+x-3\\
1 &= 3x && |:3\\
x &= \frac{1}{3} &&
\end{aligned}$$

Kontrolle, ob $x\in$ **D** :

$\frac{1}{3}\notin$ **D** = **R**\{$\frac{1}{3}$} $\Rightarrow$ **L**={ }

2f) $\frac{2(x-2)}{x-5}=\frac{2x-4}{x-5}$

Definitionsbereich bestimmen:

$x-5=0 \Rightarrow x=5$ $\Rightarrow$ **D** = **R**\{5}

$$\begin{aligned} \frac{2(x-2)}{x-5} &= \frac{2x-4}{x-5} && |\cdot(x-5) \\ 2x-4 &= 2x-4 && |-2x+4 \\ 0 &= 0 && \text{wahre Aussage} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ für alle $x \in$ **D** = **R**\{5} ist die Gleichung erfüllt

$\Rightarrow$ **L**= **D** = **R**\{5}

2.	**g)**	**D** = **R**\{2}	**L**={8}
	h)	**D** = **R**\{-5}	**L**={7}
	i)	**D** = **R**\{2}	**L**={5}
	j)	**D** = **R**\{-3,2}	**L**={7}
	k)	**D** = **R**\{$-\frac{4}{3},-1$}	**L**={2}
	l)	**D** = **R**\{2, $\frac{7}{2}$}	**L**={6}

Lösungen - Schwierigkeitsgrad 3

3a) $\frac{4}{x+1}=\frac{7}{4x+4}+\frac{3}{2x-2}$

Definitionsbereich bestimmen:
$x+1=0 \Rightarrow x=-1,\ \ 4x+4=0 \Rightarrow x=-1$
$2x-2=0 \Rightarrow x=1$
$\Rightarrow$ **D** = **R**\{-1,1}

$$\begin{aligned}
\frac{4}{x+1} &= \frac{7}{4x+4}+\frac{3}{2x-2} && \\
\frac{4}{x+1} &= \frac{7}{4(x+1)}+\frac{3}{2(x-1)} && |\cdot 4(x-1)(x+1) \\
16(x-1) &= 7(x-1)+6(x+1) && \\
16x-16 &= 7x-7+6x+6 && \\
16x-16 &= 13x-1 && |-13x+16 \\
3x &= 15 && |:3 \\
x &= 5 &&
\end{aligned}$$

Kontrolle, ob $x \in$ **D** :
$5 \in$ **D** = **R**\{-1,1} $\Rightarrow$ **L**={5}

3b) $\frac{20x+2}{6x+6}-1=\frac{6x-4}{2x+2}$

Definitionsbereich bestimmen:
$6x+6=0 \Rightarrow x=-1,\ \ 2x+2=0 \Rightarrow x=-1$ $\Rightarrow$ **D** = **R**\{-1}

$$\begin{aligned}
\frac{20x+2}{6x+6}-1 &= \frac{6x-4}{2x+2} && \\
\frac{20x+2}{6(x+1)}-1 &= \frac{6x-4}{2(x+1)} && |\cdot 6(x+1) \\
20x+2-6(x+1) &= 3(6x-4) && \\
20x+2-6x-6 &= 18x-12 && \\
14x-4 &= 18x-12 && |-14x+12 \\
4x &= 8 && |:4 \\
x &= 2 &&
\end{aligned}$$

Kontrolle, ob $x \in$ **D** :
$2 \in$ **D** = **R**\{-1} $\Rightarrow$ **L**={2}

3c) $\frac{11x-2}{2x+2}-\frac{3x-1}{x+3}=\frac{5x+15}{2x+6}$

Definitionsbereich bestimmen:

$2x+2=0 \Rightarrow x=-1,\ \ x+3=0 \Rightarrow x=-3$

$2x+6=0 \Rightarrow x=-3$

$\Rightarrow$ **D** = **R**\{-3,-1}

$$\begin{aligned}
\frac{11x-2}{2x+2}-\frac{3x-1}{x+3} &= \frac{5x+15}{2x+6} \\
\frac{11x-2}{2(x+1)}-\frac{3x-1}{x+3} &= \frac{5x+15}{2(x+3)} && |\cdot 2(x+1)(x+3) \\
(11x-2)(x+3)-(2(3x-1)(x+1)) &= (5x+15)(x+1) \\
11x^2-2x+33x-6-(2(3x-1)(x+1)) &= 5x^2+5x+15x+15 \\
11x^2+31x-6-6x^2-4x+2 &= 5x^2+20x+15 \\
5x^2+27x-4 &= 5x^2+20x+15 && |-5x^2-20x+4 \\
7x &= 19 && |:7 \\
x &= \frac{19}{7}
\end{aligned}$$

Kontrolle, ob $x \in$ **D** :

$\frac{19}{7} \in$ **D** = **R**\{-3,-1}

$\Rightarrow$ **L**={$\frac{19}{7}$}

3.	**d)**	**D** = **R**\{2}	**L**={3}
	e)	**D** = **R**\{3}	**L**={12}
	f)	**D** = **R**\{8}	**L**={11}
	g)	**D** = **R**\{5}	**L**={8}
	h)	**D** = **R**\{3}	**L**={$-\frac{1}{4}$}
	i)	**D** = **R**\{4}	**L**=R\{4}

Lösungen - Schwierigkeitsgrad 4

4a) $\frac{1}{x-2} = \frac{9}{x^2-4}$

Definitionsbereich bestimmen:

$x-2=0 \Rightarrow x=2,\ x^2-4=(x-2)(x+2)=0 \Rightarrow x=2,\quad x=-2$ $\Rightarrow$ **D** = **R**\{-2,2}

$$\begin{aligned} \frac{1}{x-2} &= \frac{9}{x^2-4} \\ \frac{1}{x-2} &= \frac{9}{(x-2)(x+2)} && |\cdot(x-2)(x+2) \\ x+2 &= 9 && |-2 \\ x &= 7 \end{aligned}$$

Kontrolle, ob $x \in$ **D** :

$7 \in$ **D** = **R**\{-2,2} $\Rightarrow$ **L**={7}

4b) $\frac{2}{x-3} + \frac{2}{x+3} = \frac{24}{x^2-9}$

Definitionsbereich bestimmen:

$x-3=0 \Rightarrow x=3,\ x+3=0 \Rightarrow x=-3,\quad x^2-9=(x-3)(x+3)=0$

$\Rightarrow$ **D** = **R**\{-3,3}

daraus resultieren die selben x.

$$\begin{aligned} \frac{2}{x-3} + \frac{2}{x+3} &= \frac{24}{x^2-9} \\ \frac{2}{x-3} + \frac{2}{x+3} &= \frac{24}{(x-3)(x+3)} && |\cdot(x-3)(x+3) \\ 2(x+3)+2(x-3) &= 24 \\ 2x+6+2x-6 &= 24 \\ 4x &= 24 && |:4 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

Kontrolle, ob $x \in$ **D** :

$6 \in$ **D** = **R**\{-3,3} $\Rightarrow$ **L**={6}

4c) $\frac{6}{4x^2+12x+9}+\frac{4x}{2x+3}=2$

Definitionsbereich bestimmen:

$4x^2+12x+9=(2x+3)(2x+3)=0 \Rightarrow 2x+3=0, \Rightarrow x=-\frac{3}{2}$ $\Rightarrow$ **D** = **R**\\{$-\frac{3}{2}$}

dasselbe *x* ergibt sich durch den zweiten Nenner

$$
\begin{aligned}
\frac{6}{4x^2+12x+9}+\frac{4x}{2x+3} &= 2 \\
\frac{6}{(2x+3)(2x+3)}+\frac{4x}{2x+3} &= 2 && |\cdot(2x+3)(2x+3) \\
6+4x(2x+3) &= 2(2x+3)(2x+3) \\
6+8x^2+12x &= 8x^2+12x+12x+18 && |-8x^2 \\
6+12x &= 24x+18 && |-12x-18 \\
12x &= -12 && |:12 \\
x &= -1
\end{aligned}
$$

Kontrolle, ob $x \in$ **D** :

$-1 \in$ **D** = **R**\\{$-\frac{3}{2}$} $\Rightarrow$ **L**={-1}

4.	**d)**	**D** = **R**\\{-2,2}	**L**={-1}
	e)	**D** = **R**\\{$-\frac{5}{4},\frac{5}{4}$}	**L**={-2}
	f)	**D** = **R**\\{-2,2}	**L**={4}
	g)	**D** = **R**\\{-5,5}	**L**={ }
	h)	**D** = **R**\\{$-\frac{4}{3},\frac{4}{3}$}	**L**={-1}

1) $\frac{1}{x-t}=1-\frac{1}{t}$

Definitionsbereich bestimmen:
$x-t=0 \Rightarrow x=t$ $\Rightarrow$ **D** = **R**\{t}

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x-t} &= 1-\frac{1}{t} && |\cdot t(x-t),\, t\neq 0\\
t &= t(x-t)-(x-t)\\
t &= tx-t^2-x+t && |+t^2-t\\
t^2 &= tx-x\\
t^2 &= x(t-1) && |:(t-1),\, t\neq 1\\
x &= \frac{t^2}{t-1}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ **L**=$\{\frac{t^2}{t-1};\, t\neq 0,\, t\neq 1\}$

2) $\frac{h}{b}=\frac{x-h}{x}$

Definitionsbereich bestimmen:
$x=0$ $\Rightarrow$ **D** = **R**\{0}

$$\begin{aligned}
\frac{h}{b} &= \frac{x-h}{x} && |\cdot bx,\, b\neq 0\\
hx &= b(x-h)\\
hx &= bx-bh && |-bx\\
hx-bx &= -bh\\
x(h-b) &= -bh && |:(h-b),\, h\neq b\\
x &= \frac{-bh}{h-b}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ **L**=$\{\frac{-bh}{h-b};\, b\neq 0,\, b\neq h\}$

3) $\dfrac{3x+p}{3x-1} = \dfrac{x+1}{x-p}$

Definitionsbereich bestimmen:

$3x-1=0 \Rightarrow x=\dfrac{1}{3}, \quad x-p=0 \Rightarrow x=p$ $\Rightarrow$ **D** = **R**\{$\dfrac{1}{3}$, p}

$$
\begin{aligned}
\frac{3x+p}{3x-1} &= \frac{x+1}{x-p} && |\cdot(3x-1)(x-p) \\
(3x+p)(x-p) &= (x+1)(3x-1) \\
3x^2-3px+px-p^2 &= 3x^2-x+3x-1 && |-3x^2 \\
-3px+px-p^2 &= 2x-1 && |-2x+p^2 \\
-2px-2x &= p^2-1 \\
x(-2p-2) &= p^2-1 && |:(-2p-2),\ p\neq -1 \\
x &= \frac{(p+1)(p-1)}{-2(p+1)} \\
x &= \frac{p-1}{-2} = \frac{1-p}{2}
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ **L**={$\dfrac{1-p}{2}$; $p \neq -1$}

4)	**D** = **R**\{1}	**L**={$\dfrac{a-1}{a+1}$, $a \neq -1$}
5)	**D** = **R**	**L**={$\dfrac{1}{m(m-1)}$, $m \neq 0, m \neq 1$}

6) $\frac{7}{t^2+tx}-\frac{t+4}{tx}+\frac{3t-2}{tx+x^2}=0$

Definitionsbereich bestimmen:

$t^2+tx=t(t+x)=0 \Rightarrow x=-t, \quad tx=0 \Rightarrow x=0,$

$tx+x^2=0 \Rightarrow x(t+x)=0 \Rightarrow x=0, x=-t$

$\Rightarrow$ **D** = **R**\\$\{-t,0\}$

$$\begin{aligned}
\frac{7}{t^2+tx}-\frac{t+4}{tx}+\frac{3t-2}{tx+x^2} &= 0 \\
\frac{7}{t(t+x)}-\frac{t+4}{tx}+\frac{3t-2}{x(t+x)} &= 0 && |\cdot tx(t+x), t\neq 0 \\
7x-(t+4)(t+x)+t(3t-2) &= 0 \\
7x-t^2-tx-4t-4x+3t^2-2t &= 0 && |-2t^2+6t \\
3x-tx &= -2t^2+6t \\
x(3-t) &= 2t(3-t) && |:(3-t), \quad t\neq 3 \\
x &= 2t
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ **L**=$\{2t;\, t\neq 0, t\neq 3\}$

7) $\frac{2(x-c)}{a^2+ab-ac-bc}-\frac{x+c}{a^2+ab+ac+bc}=\frac{1}{a+b}$

Definitionsbereich bestimmen: kein *x* im Nenner $\Rightarrow$ **D** = **R**

Bedingungen für Parameter :

$a(a-c)+b(a-c)=(a+b)(a-c)=0 \Rightarrow a\neq -b, a\neq c$

$a(a+b)+c(a+b)=(a+b)(a+c)=0 \Rightarrow a\neq -b, a\neq -c$

$a+b=0 \Rightarrow a\neq -b$

$$\begin{aligned}
\frac{2(x-c)}{(a+b)(a-c)}-\frac{x+c}{(a+b)(a+c)} &= \frac{1}{a+b} && |\cdot (a+b)(a+c)(a-c) \\
2(x-c)(a+c)-(x+c)(a-c) &= (a+c)(a-c) \\
2ax+2cx-2ac-2c^2-ax+cx-ac+c^2 &= a^2-c^2 \\
ax+3cx-3ac-c^2 &= a^2-c^2 && |+3ac+c^2 \\
x(a+3c) &= a^2+3ac \\
x(a+3c) &= a(a+3c) && |:(a+3c), a\neq -3c \\
x &= a
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$
L=$\{a;\, a\neq b, a\neq -c, a\neq c, a\neq -3c$
$\}$

8)	**D** = **R**\\{1}	**L**=$\{\frac{g}{2g+h}, g\neq -\frac{1}{2}h, g\neq 0\}$

Lösungen Textaufgaben zu Bruchgleichungen

1) Ein Bruch hat den Wert $\frac{17}{18}$. Welche Zahl muss man vom Zähler subtrahieren und zum Nenner addieren, damit sein Wert $\frac{2}{3}$ wird ?

Unbekannte : Zahl (x)

Gleichung:

$$\frac{17-x}{18+x} = \frac{2}{3}$$

Auflösen :

$$\begin{aligned}
\frac{17-x}{18+x} &= \frac{2}{3} && \mid \cdot 3(18+x) \\
3(17-x) &= 2(18+x) && \\
51-3x &= 36+2x && \mid -36+3x \\
15 &= 5x && \mid :5 \\
x &= 3 &&
\end{aligned}$$

Lösung kontrollieren: $\frac{17-3}{18+3} = \frac{14}{21} = \frac{2}{3}$

Die gesuchte Zahl lautet 3.

2) Ein leeres Schwimmbecken kann durch die Zuflussleitung in 15 Stunden gefüllt werden. Ist das Becken voll, so dauert es 20 Stunden, um das Wasser wieder ablaufen zu lassen. Das Becken ist leer. Die Besitzerin will es füllen, vergisst jedoch, den Ablauf zu schliessen.
Wie lange dauert es, bis das Schwimmbecken trotzdem voll ist?

Art der Textaufgabe : Leistung und Arbeit.

Unbekannte : *x* = Anzahl Stunden, welche das Füllen bei geöffnetem Zu- und Ablauf dauert. Das heisst, dass auf diese Art in einer Stunde *1/x* des Volumens des ganzen Beckens gefüllt wird.

Gleichung:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{15} - \frac{1}{20}$$

Auflösen :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x} &= \frac{1}{15} - \frac{1}{20} && \mid \cdot 60x \\
60 &= 4x - 3x && \\
x &= 60 &&
\end{aligned}$$

Lösung kontrollieren: In 60 Stunden füllt der Zulauf das Becken vier Mal $(60 = 4 \cdot 15)$. In 60 Stunden leert der Ablauf das Becken drei Mal $(60 = 3 \cdot 20)$. Total bleibt in 60 Stunden eine « Füllung » übrig.

Der Füllvorgang dauert 60 Stunden.

3) Zum Entladen eines Getreideschiffes benötigen zwei Fördergebläse drei Stunden. Das eine Gebläse arbeitet doppelt so schnell wie das andere. Wie viele Stunden benötigt jedes Gebläse alleine?

Art der Textaufgabe : Leistung [$A = L \cdot t$]

Hier zwei Leistungen : $L_1 = \frac{A}{t}$ stärkeres Gebläse

$L_2 = \frac{A}{2t}$ schwächeres Gebläse

Unbekannte : $x = t$ Zeit [h] des stärkeren Gebläses

Gleichung:
(die ganze Arbeit = 1)

$$1 = L_1 \cdot 3 + L_2 \cdot 3$$

Auflösen :

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{t} \cdot 3 + \frac{1}{2t} \cdot 3 && | \cdot 2t \\ 2t &= 6 + 3 && | : 2 \\ t &= 4.5 \end{aligned}$$

Kontrolle : $1 = \frac{1}{4.5} \cdot 3 + \frac{1}{9} \cdot 3 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$

Das stärkere Gebläse braucht 4h30min, das schwächere Gebläse 9h, um die Arbeit alleine zu erledigen.

4) In einem Braunkohletagebau haben zwei Bagger zusammen 85 Tage benötigt, um die Erde über der Braunkohle zu entfernen. Der kleinere der beiden schafft 40% der Leistung des grösseren. Wie viele Tage hätte jeder Bagger benötigt, wenn er jeweils allein gearbeitet hätte?

Art der Textaufgabe : Leistung [$A = L \cdot t$]

Hier zwei Leistungen : $L_1 = \frac{A}{t}$ [d] grosser Bagger

$L_2 = 0.4 \cdot \frac{A}{t}$ kleiner Bagger

Unbekannte : $x = t$ Zeit [h] des grossen Baggers

Gleichung:
(die ganze Arbeit = 1)

$$1 = L_1 \cdot 85 + L_2 \cdot 85$$

Auflösen :

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{t} \cdot 85 + \frac{0.4}{t} \cdot 85 && | \cdot t \\ t &= 85 + 34 \\ t &= 119 \end{aligned}$$

Kontrolle : $1 = \frac{1}{119} \cdot 85 + \frac{0.4}{119} \cdot 85 = 1$

Der grosse Bagger braucht 119 Tage, der kleine Bagger 297.5 Tage $\left(\frac{1}{0.4} \cdot 119 \right)$, um die Arbeit alleine zu erledigen.

5) Läufer A benötigt für eine 25 km lange Strecke 30 Minuten mehr, als Läufer B für 15 km braucht. Die Geschwindigkeit von A ist um 2.5 km/h grösser als die von B.
Berechne die Laufzeit von A.

Art der Textaufgabe : Geschwindigkeit

Hier zwei Geschwindigkeiten: Läufer A $v_1 = \frac{25}{t}$ wobei $v = \frac{s}{t}$ $\left[\frac{km}{h}\right]$

Läufer B $v_2 = \frac{15}{t-0.5}$

Unbekannte : $x = t$ Zeit [h] von Läufer A

Gleichung: $v_1 - 2.5 = v_2$

Auflösen :

$$
\begin{aligned}
\frac{25}{x} - 2.5 &= \frac{15}{x-0.5} && |\cdot x(x-0.5)\\
25(x-0.5) - 2.5x(x-0.5) &= 15x\\
-2.5x^2 + 26.25x - 12.5 &= 15x && |-15x\\
-2.5x^2 + 11.25x - 12.5 &= 0 && |:(-2.5)\\
x^2 - 4.5x + 5 &= 0\\
(x-2)(x-2.5) &= 0\\
x_1 = 2, \quad x_2 &= 2.5
\end{aligned}
$$

Kontrolle :
Bei Lösung 1 benötigt Läufer A 2 Stunden mit 12.5km/h, B braucht 1.5 Stunden bei 10km/h
Bei Lösung 2 benötigt Läufer A 2.5 Stunden mit 10km/h, B braucht 2 Stunden bei 7.5km/h
Beide Lösungen sind richtig !

Siehe die Sätze bei « Kontrolle »