KANTON LUZERN
Bildungs- und Kulturdepartement

Kantonale Fachschaft Mathematik

Repetitionsaufgaben: quadratische Funktionen

Zusammengestellt von Bruno Wyrsch und Erich Huber, KS Seetal

Inhaltsverzeichnis

Lernziele:

→ Sie wissen, dass der Graph einer quadratischen Funktion eine Parabel ist und kennen die Scheitelpunktsform und die allgemeine Form einer quadratischen Funktion.
→ Sie können eine in der allgemeinen Form dargestellte quadratische Funktion durch quadratisches Ergänzen in die Scheitelpunktsform bringen.
→ Sie können die Nullstellen des Graphen einer quadratischen Funktion auf drei verschiedene Arten bestimmen.
→ Sie wissen, wie der Brennpunkt und die Leitgerade einer Parabel zu bestimmen ist.
→ Sie können Extremwertaufgaben lösen, deren Zielfunktion eine quadratische Funktion ist.

1. Einführungsbeispiel

Ein 44cm langes Drahtstück soll zu einem Rechteck von möglichst grossem Flächeninhalt geformt werden. Wie lang sind die Seiten des Rechtecks zu wählen?

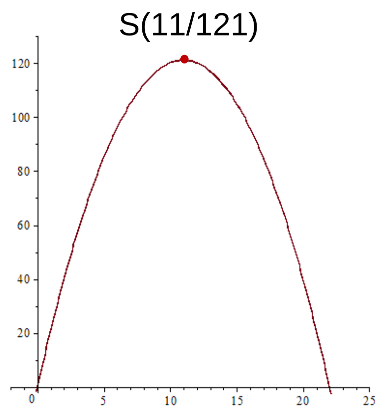
Lösungsweg:
Wählt man für die Länge des Rechtecks x cm, bleibt für die Breite des Rechtecks $\frac{44-2x}{2}$ cm übrig. Die Fläche A des Rechtecks ergibt somit:

$$A(x) = x \cdot \frac{44-2x}{2} = x \cdot (22-x)$$
$$= 22x - x^2$$

Variiert man die Länge x des Rechtecks von 0 bis 22cm, verändert sich damit die Fläche A(x) gemäss der folgenden Wertetabelle:

x (cm)	0	2	4	6	8	10	11	12	14	16	18	20	22
A (cm^2)	0	40	72	96	112	120	121	120	112	96	72	40	0

bei **x = 11cm** ist
die Fläche maximal!



Die Fläche des Rechtecks hat somit bei der Länge x=11cm die grösste Fläche A(x)=121cm^2. Die Breite des Rechtecks ist ebenfalls 11cm. Das Rechteck ist also ein Quadrat.
Die Funktion ist 2. Grades (quadratische Funktion), ihr Scheitelpunkt S hat die Koordinaten S(11/121).

Die Funktionsgleichung kann in der **allgemeinen Form** geschrieben werden: **$f(x) = -x^2+22x$**

Die Funktion kann aber auch – z.B. mit „quadratisch ergänzen“ in die **Scheitelpunktsform** umgewandelt werden: $f(x) = -x^2+22x = -(x-\mathbf{11})^2 + \mathbf{121}$
Aus dieser Form ist der Scheitelpunkt der Funktion direkt ablesbar.

2. Allgemeine Form der Parabel

Eine Funktion, geschrieben in der allgemeinen Form $f(x) = ax^2+bx+c$ (a, b, c $\in$ R und $a \neq 0$) heisst quadratische Funktion oder Funktion zweiten Grades. Der Graph einer quadratischen Funktion heisst **Parabel**, deren Symmetrieachse parallel zur y-Achse verläuft.

Ist $a \neq 0$ und $b = c = 0$, vereinfacht sich die Funktionsgleichung zu einer **reinquadratischen** Funktion $f(x) = ax^2$. Ihr Graph nennt man Normalparabel.

Ist die Parabel gegen unten geöffnet, ist der Scheitelpunkt ein **Hochpunkt**. Umgekehrt ist der Scheitelpunkt ein **Tiefpunkt**, wenn die Parabel gegen oben geöffnet ist.

Schneidet die Parabel die x-Achse, liegen an diesen Stellen **Nullstellen** der Funktion vor (Funktionswert f(x) = 0). Parabeln können eine, zwei oder keine Nullstellen haben.

3. Scheitelpunktsform der Parabel

Die Funktionsgleichung der Parabel kann in der sogenannten Scheitelpunktsform geschrieben werden:

$$f(x) = a(x-e)^2 + d$$

Welchen Einfluss haben die Parameter a, e und d auf den Graphen der Funktion? Unsere Analyse geht von der Normalparabel $f(x)=x^2$ mit Scheitelpunkt im Ursprung aus. Die Funktion wird schrittweise entsprechend den drei Parametern verändert und der Einfluss untersucht.

Parameter a:

Beispiele: Wir zeichnen die folgenden Funktionen in ein Koordinatensystem:
(I) $f(x) = x^2$ (II) $f(x) = 0.2x^2$ (III) $f(x) = 5x^2$ (IV) $f(x) = -x^2$

Wenn wir die Funktionen miteinander vergleichen, stellen wir fest:
$|a| = 1$ Normalform $|a| > 1$ <u>Kurve schmaler</u> $|a| < 1$ <u>Kurve breiter</u>
$a > 0$ <u>Parabel nach oben offen</u> $a < 0$ <u>Parabel nach unten offen</u>

allgemein: Jeder Funktionswert von $f(x)=x^2$ wird mit a multipliziert, die Funktionsgleichung wird zu $f(x)=ax^2$. Die Kurve wird um den Faktor a „enger/flacher“ ohne die Lage des Scheitelpunktes zu ändern.

Parameter e:

Beispiele: Wir zeichnen die folgenden Funktionen in ein Koordinatensystem:
(I) $f(x) = x^2$ (II) $f(x) = (x-3)^2$ (II) $f(x) = (x+2)^2$

Wenn wir die Funktionen miteinander vergleichen, stellen wir fest:
$e > 0$ <u>Verschiebung nach rechts</u> $e < 0$ <u>Verschiebung nach links</u>

allgemein: Jeder Funktionswert von $f(x)=x^2$ wird um e nach rechts oder links verschoben, die Funktionsgleichung wird zu $f(x)=(x-e)^2$. Der Scheitelpunkt verschiebt sich in x-Richtung und erhält die x-Koordinate e.

Parameter d:

Beispiele: Wir zeichnen die folgenden Funktionen in ein Koordinatensystem:
(I) $f(x) = 2(x-3)^2$ (II) $f(x) = 2(x-3)^2+2$ (II) $f(x) = 2(x-3)^2-3$

Wenn wir die Funktionen miteinander vergleichen, stellen wir fest:
$d > 0$ <u>Verschiebung nach oben</u> $d < 0$ <u>Verschiebung nach unten</u>

allgemein: Jeder Funktionswert von $f(x)= a(x-e)^2$ wird um d nach oben oder unten verschoben, die Funktionsgleichung wird zu $f(x)=a(x-e)^2+d$. Der Scheitelpunkt verschiebt sich und erhält die y-Koordinate d.

Der Scheitel hat also die Koordinaten **S(e/d).** Der Parameter a hat darauf keinen Einfluss.

Wir fassen nochmals zusammen für:	$\mathbf{y = a(x-e)^2+d}$
Verschiebung um **e** nach rechts, wenn $e \geq 0$	Streckung (Kurve schmal), wenn: $|\mathbf{a}| > 1$
Verschiebung um **e** nach links, wenn $e \leq 0$	Stauchung (Kurve breit), wenn $|\mathbf{a}| < 1$
Verschiebung um **d** nach oben, wenn $d \geq 0$ Verschiebung um **d** nach unten, wenn $d \leq 0$	

4. Koordinaten des Scheitelpunkts

Aus der Scheitelpunktsform lassen sich also die Koordinaten des Scheitelpunktes direkt bestimmen.

Um die Koordinaten vom Scheitel direkt mit den Koeffizienten a, b und c aus der allgemeinen Form $y=ax^2+bx+c$ bestimmen zu können, formen wir die Scheitelpunktsform um:

$$f(x) = a(x-e)^2+d = a(x^2-2xe+e^2)+d = \mathbf{a}x^2\mathbf{-2ae}x+\mathbf{ae^2+d}$$

Vergleich mit der allgemeinen Form: $y = \mathbf{a}x^2+\mathbf{b}x+\mathbf{c}$

dann entspricht: $a = a$, $b = -2ae$, $c = ae^2+d$

b umformen nach e: $b = -2ae \rightarrow e = -\dfrac{b}{2a}$

c umformen nach d: $c = ae^2+d \rightarrow$

$$d = c - ae^2 = c - a \cdot \frac{b^2}{4a^2} = c - \frac{b^2}{4a}$$

die Koordinaten vom Scheitelpunkt lassen sich direkt mit den Koeffizienten der allgemeinen Form bestimmen:

$$\boxed{\mathbf{S}(\mathbf{e} \mid \mathbf{d}) = \mathbf{S}\left(-\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{2a}} \,\middle|\, \mathbf{c} - \frac{\mathbf{b}^2}{\mathbf{4a}}\right)}$$

Beispiel: $f(x) = 2x^2 -16x +10$

$$f(x)=2x^2\text{-}16x+10 \Rightarrow \left\{\begin{matrix} a=2 \\ b=-16 \\ c=10 \end{matrix}\right\} \Rightarrow S\left(-\frac{-16}{2\cdot 2} \,\middle|\, 10 - \frac{(-16)^2}{4\cdot 2}\right) \Rightarrow S(4 \mid -22)$$

Zum Vergleich mit Quadratisch Ergänzen
$f(x) = 2x^2 -16x +10 = 2(x^2 -8x) +10 = 2(x-4)^2 -32 +10 = 2(x-4)^2 -22$
Der Scheitelpunkt hat die Koordinaten S(4/-22)

5. Nullstellen berechnen

Bei einer Nullstelle ist der Funktionswert der Funktion f(x)=0. Der Graph der parabel schneidet an diesen Stellen die x-Achse. Möchte man diese Nullstellen berechnen, setzt man die Funktion gleich Null, wir erhalten eine quadratische Gleichung und es gelten die Umformungsregeln für quadratische Gleichungen

$$f(x) = ax^2+bx+c = 0$$

5.1 Lösen durch Faktorisieren

Beispiel

Bestimme die Nullstellen der Funktion $f(x)=x^2-6x+5$
Die Funktion lässt sich faktorisieren, bevor sie gleich Null gesetzt wird:
$f(x) = x^2-6x+5 = (x–1)\,(x–5) = 0$

Entweder ist $x–1 = 0$ also $x_1 = 1$ oder $x–5 = 0$ also $x_2 = 5$

5.2 Lösen durch quadratische Ergänzung

Beispiel 1 Bestimme die Nullstellen der Funktion $f(x)= x^2 +4x -1$

$f(x) = x^2 +4x -1 = (x+2)^2 -4 -1=(x+2)^2 -5 = 0$

$(x+2)^2 = 5 \Rightarrow \quad (x+2) = \pm\sqrt{5} \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \pm\sqrt{5}-2$

Beispiel 2 Bestimme die Nullstellen der Funktion $f(x)= 5x^2 - 70x + 225$

$5x^2 - 70x + 225 = 0$

$5(x^2 - 14x) + 225 = 0$ | Die Zahl vor dem x^2 ausklammern

$5(x-7)^2 - 5\cdot 49 + 225 = 0$ | In ein Binom verwandeln und korrigieren

$\mathbf{5}(x-7)^2 = 20$ | Zahlen auf die rechte Seite bringen

$(x-7) = \pm 2$ | 5 nach rechts dividieren und Wurzel ziehen

$x_1 = 9 \qquad x_2 = 5$

5.3 Lösen mit der Auflösungsformel für quadratische Gleichungen

Die Nullstellen der quadratischen Funktion $f(x) = ax^2+bx+c$ lassen sich nicht zuletzt auch mit der Auflösungsformel

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$ bestimmen.

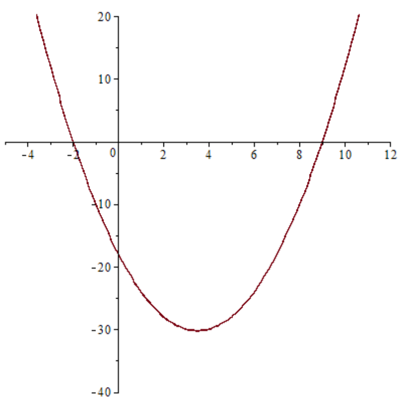
Die Anzahl Lösungen einer quadratischen Gleichung hängen bekanntlich von der Diskriminante D ab. Diese gibt Auskunft über die Anzahl Nullstellen.

$D > 0 \Rightarrow$ Es gibt zwei Lösungen $x_1 \neq x_2$. Die Funktion hat zwei Nullstellen.

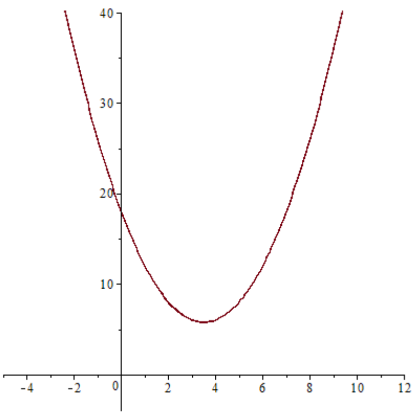
$D = 0 \Rightarrow$ Es gibt eine Lösung, nämlich $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$. Die Funktion hat eine Nullstelle.

$D < 0 \Rightarrow$ Es gibt keine Lösung. Die Funktion hat keine Nullstellen.

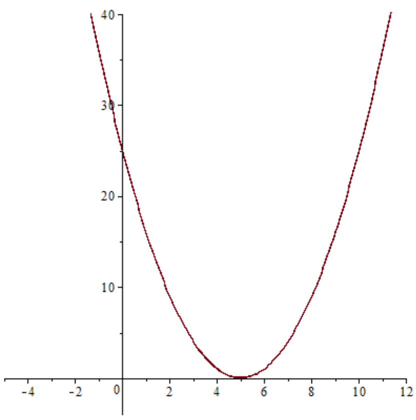
Beispiele für die möglichen Anzahl Nullstellen einer Parabel:



Zwei Nullstellen $f(x)=x^2-7x-18$
D>0



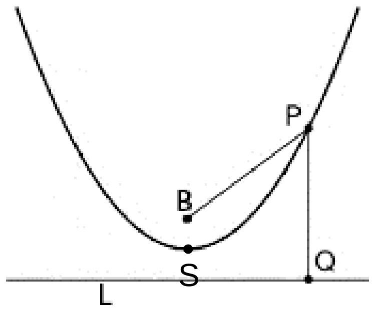
keine Nullstellen $f(x)=x^2-7x+18$
D<0



eine Nullstelle $f(x)=x^2-10x+25$
D=0

6. Geometrische Bedeutung der Parabel

Die Parabel besteht aus allen Punkten, die von ihrem Brennpunkt B denselben Abstand haben wie von der Leitgeraden L.



In der Abbildung ist ein beliebiger Punkt P auf der Parabel gegeben. Der Punkt P hat zum Brennpunkt B denselben Abstand (Strecke BP) wie zur Geraden L (Strecke PQ).

6.1 Brennpunkt

Der Brennpunkt B der Normalparabel $y=ax^2$ liegt in $B\left(0\,\middle|\,\frac{1}{4a}\right)$.

Bei einer beliebigen Parabel $f(x)= ax^2+bx+c$ hat der Brennpunkt dieselbe x-Koordinate wie der Scheitelpunkt (da die Parabel
Achsensymmetrisch ist), die y-Koordinate ist im Vergleich zum Scheitelpunkt jedoch um die Strecke $\frac{1}{4a}$ nach oben/unten verschoben (siehe untenstehendes Beispiel 1+2)

6.2 Leitgerade

Der Scheitelpunkt S hat zum Brennpunkt B denselben Abstand wie zur Leitgeraden L. Die Funktionsgleichung der zur x-Achse parallelen Geraden L gibt an, wo sie die y-Achse schneidet. In den beiden untenstehenden Beispielen ist dies bei y=8 und bei y=11.

Beispiel 1: $f(x)=\frac{1}{8}(x-4)^2+10 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4\cdot a} \rightarrow \frac{1}{4\cdot\frac{1}{8}}=2$

$S(4\,|10),\quad B(4\,|12),\quad L=8$

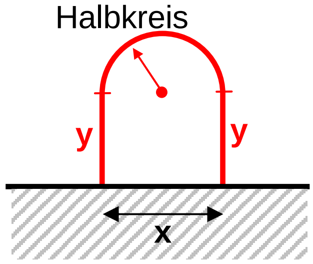
Beispiel 2: $f(x)=-\frac{1}{4}(x-4)^2+10 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4\cdot a} \rightarrow \frac{1}{4\cdot(-\frac{1}{4})}=-1$

$S(4\,|10),\quad B(4\,|9),\quad L=11$

7. Extremwertprobleme

Viele Extremwertaufgaben führen auf quadratische Funktionen. Da der Scheitelpunkt ein Maximum oder Minimum der Funktion darstellt, lassen sich die Lösungen solcher Aufgaben mit den Koordinaten des Scheitelpunktes bestimmen.

Folgendes Beispiel illustriert dieses Vorgehen.



Mit einem 40m langen Zaun wollen Sie eine möglichst grosse Fläche umzäunen. Die Form der Fläche ist ein Halbkreis mit angesetzten geraden Stücken (siehe Zeichnung). Wie sind die Masse zu wählen? Interpretieren Sie Ihr Resultat.

Vorgehen:

1. **Hauptbedingung** (wird formuliert für das, was maximal oder minimal werden soll)

   $$F(x,y) = xy + \frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 = xy + \frac{\pi}{8}x^2$$

2. **Nebenbedingung** (formuliert den Zusammenhang zwischen x und y):

   $$40 = 2y + \frac{\pi}{2}x \qquad \text{also:} \quad y = 20 - \frac{\pi}{4}x$$

3. **Zielfunktion (**die Nebenbedingung wird in der Hauptbedingung eingesetzt):

$F(x) = -\frac{\pi}{8}x^2 + 20x$ (Die Zielfunktion ist nur noch von x abhängig!)

Um das Maximum zu ermitteln, muss die Zielfunktion in die Scheitelpunktsform umgeschrieben werden. Die x-Koordinate des Scheitels ist die gesuchte Strecke x. Die Strecke y ergibt sich aus der Nebenbedingung (nicht etwas aus dem Funktionswert der Zielfunktion!)

$$F(x) = -\frac{\pi}{8}x^2 + 20x \quad = -\frac{\pi}{8}(x^2 - \frac{160}{\pi}x) \quad = -\frac{\pi}{8}\left(x - \frac{80}{\pi}\right)^2 - \frac{6400}{\pi^2}\left(-\frac{\pi}{8}\right)$$

Die x- Koordinate des Scheitelpunktes ist $x = \frac{80}{\pi}$ $\Rightarrow y = 20 - \frac{\pi}{4}x = 0$ Die Strecke y ist Null!

Interpretation: Die gerade Strecke y ist Null, da der Kreis bereits die optimale Eigenschaft *Maximale Fläche bei minimalem Umfang* hat. Ein gerades Zusatzstück würde die Situation nur verschlechtern.

8. Aufgaben

1) Betrachte die allgemeine Funktionsgleichung der Parabel mit $f(x) = ax^2 + bx + c$. Gib für jeden der Parameter a, b und c an, welchen Einfluss er auf den Graphen hat und begründe das kurz.

2) Bestimme die Nullstellen der Funktion f(x) mit Faktorisieren:

   a) $f(x) = x^2-7x-18$
   b) $x^2 - 4x = 0$
   c) $2x^2 - 13x + 15 = 0$
   d) $5x^2 – 3x = 0$
   e) $2x = 4x^2$
   f) $4 (2 – x) (5x – 3) = 0$

3) a) Erfinde eine quadratische Gleichung mit den Lösungen $x_1=-3$ und $x_2=8$
   b) Erfinde eine quadratische Funktion mit den Nullstellen $x_1=0$ und $x_2=2$
   c) Erfinde eine quadratische Funktion mit den Nullstellen $x_1 = x_2 = 2$

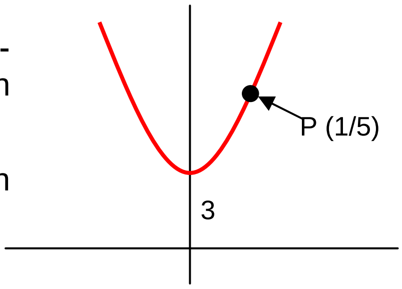
   Die Gleichungen müssen in der Form $ax^2 + bx + c = 0$, und die Funktionen in der Form $f(x) = ax^2 + bx + c$ dargestellt werden.

4) Bestimme mit „quadratisch Ergänzen" die Scheitelpunktsform der Parabeln!
   a) $f(x)= -3x^2-6x+10$
   b) $f(x)= -8x^2-24x+12$
   c) $f(x)= (x+4)(2x-6)$

5) Bestimme die Parabelgleichung in der allgemeinen Grundform, so dass sie durch die Punkte P(-4/8), Q(0/0) und R(10/15) geht.

6) Bestimme die Parabelgleichung in der allgemeinen Grundform mit dem Scheitelpunkt S(2/1) so, dass sie durch den Punkt P(0/4) geht.

7) Bestimme die Funktionsgleichungen der abgebildeten Parabel.



8) Bestimme die allgemeine Grundform der Parabelgleichung mit den Nullstellen $N_1(1.5/0)$ und $N_2(-3.5/0)$ und dem Funktionswert f(4.5)=24

9) Bestimme die Funktionsgleichungen der Parabeln, die durch den Ursprung gehen, die x-Achse bei x=2 schneiden und den Punkt P(1/7) enthalten:

10) Bestimme den Scheitelpunkt S der Parabel $f(x) = -0.5x^2+4x-16$ mit „quadratisch ergänzen". Für die Aufgabe d) ist zudem der Brennpunkt B der Parabel zu bestimmen. Spiegle die Parabel f(x) wie folgt:

a) an der x-Achse

b) an der y-Achse!

c) an ihrem Scheitelpunkt!

d) an ihrem Brennpunkt!

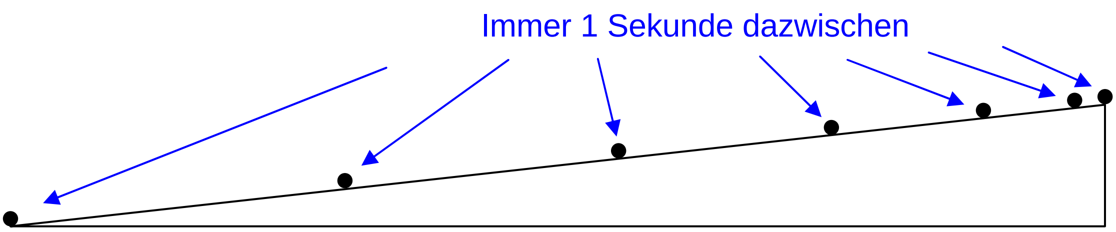
e) an ihrer Leitgeraden!

Geben Sie für a) – e) die Gleichung der Bildparabel in der Form $f'(x)=ax^2+bx+c$ an!

11) Eine Parabel ist symmetrisch zur y-Achse und geht durch den Punkt Q(-4/3). Ihr Brennpunkt ist der Nullpunkt. Bestimme die Gleichung der Leitgeraden und die der Parabel. Gibt es mehrere Lösungen?

12) Das Kantenmodell eines Quaders, der dreimal so lang wie breit ist, wird aus 520cm Draht hergestellt. Wie sind die Kanten zu wählen, wenn die Oberfläche des Quaders möglichst gross sein soll?

13) Um 1600 hat Galileo Galilei in Italien untersucht, wie eine Kugel auf einer **schiefen Ebene** hinunterrollt. Dabei hat er auf dem Brett die Position der Kugel nach immer gleichen Zeitabständen (1 Sekunde) markiert:



Galilei hat festgestellt:

„Der Körper legt in gleichen Zeitabschnitten immer grössere Wege zurück, deren Längen sich verhalten wie 1 : 3 : 5 : 7 : 9 usw."

a) Wenn der erste Weg 1 dm beträgt, welchen Weg hat die Kugel nach 5.7 sec insgesamt zurückgelegt?

b) Entwickeln Sie eine Formel zur Berechnung des insgesamt zurückgelegten Wegs nach der Zeit t

14) Bestimme den Parameter u so, dass der Scheitelpunkt der Parabel $f(x) =ux^2+ux+u$ auf der Geraden $y=-3x-2$ liegt.

9. Musterlösungen

1. In der Analyse formt man die Darstellung $f(x)=ax^2+bx+c$ in die Scheitelpunktsform um und untersucht, was eine ausschliessliche Änderung von a oder b oder c zu Folge hat. Dabei benutzt man die Erkenntnisse von der Scheitelpunktsform.

$\mathbf{f(x)=a(x-e)^2+d}$	Ausmultiplizieren
$\mathbf{f(x)=ax^2-2aex+ae^2+d}$	<u>Parameter</u> im Sinne von $f(x)=ax^2+bx+c$ <u>interpretieren</u>: $b=-2ae$, $c=ae^2+d$, die Bedeutung von a bleibt unverändert

Parameter a: **Gleicher Einfluss wie bei der Scheitelpunktsform**

Parameter b: Will man <u>Parameter</u> b ändern, so muss man e ändern. a und c müssen aber konstant bleiben, sodass man gezwungen ist, auch d zu ändern, da e auch bei c vorkommt. Daraus folgt, dass der **Parameter b die Kurve nicht nur horizontal, sondern auch vertikal verschiebt**.

Parameter c Will man <u>Parameter c</u> ändern so kann man d ändern. b soll dabei konstant bleiben: dies ist dann der Fall, wenn man e unverändert lässt. Daraus folgt, dass der Parameter **c die Kurve nur nach oben/unten verschiebt**.

5. Die Funktionsgleichung einer Parabel lässt sich durch die Angaben von **drei Punkten** bestimmen, die auf der Parabel liegen und somit die Funktionsgleichung erfüllen. In diesem Fall müssen wir die allgemeine Grundform als Funktionsansatz verwenden: Wir setzen die Koordinaten der drei Punkte im Ansatz $\mathbf{f(x) = ax^2+bx+c}$ ein und erhalten ein Gleichungssystem mit drei Gleichungen und drei Unbekannten.

$$\begin{array}{l|l|} P(-4/8) & 8=a\cdot(-4)^2+b\cdot(-4)+c \\ Q(0/0) & 0=a\cdot(0)^2+b\cdot(0)+c \\ R(10/15) & 15=a\cdot(10)^2+b\cdot(10)+c \end{array} \Rightarrow \left|\begin{array}{l} 8=16a+-4b+c \\ 0=c \\ 15=100a+10b+c \end{array}\right| \Rightarrow \left|\begin{array}{l} 8=16a+-4b \\ 15=100a+10b \end{array}\right|$$

Löst man das Gleichungssystem fertig auf, erhält man folgende Lösungen:
a=0.25 und b=-1. Die Funktionsgleichung lautet somit $f(x) = 0.25x^2-x$

6. Die Funktionsgleichung einer Parabel lässt sich auch durch die Angaben von **zwei Punkten** bestimmen - die auf der Parabel liegen - wenn einer der beiden Punkte der Scheitelpunkt ist. Wir setzen die Koordinaten der zwei Punkte in der Scheitelpunktsform $f(x) = a(x-e)^2+d$ ein! Mit S(2/1) $\Rightarrow$ $f(x)=a(x-2)^2+1$
Da die Koordinaten von P(0/4) die Funktionsgleichung ebenfalls erfüllen müssen, setzen wir diese in f(x) ein: $4=a(0-2)^2+1 = 4a + 1$, $a = 0.75$
Die Funktionsgleichung lautet somit $f(x) = 0.75(x-2)^2+1 = 0.75x^2-3x+4$

8. Die x-Koordinate des Scheitelpunkts liegt in der Mitte von zwei Nullstellen, da die Parabel achsensymmetrisch zum Scheitelpunkt liegt. In diesem Beispiel ist dies x=-1. Der Ansatz für die Gleichung lautet deshalb: $f(x)= a(x+1)^2+d$. Es sind somit nur noch zwei Parameter zu bestimmen, a und d. Setzt man die Koordinaten von zwei Punkten, die auf dem Graphen liegen, in den Funktionsansatz ein, erhält man ein Glei-

chungssystem mit zwei Gleichungen: Die Angabe f(4.5)=24 gibt die Koordinaten eines Punktes P(4.5/24) an!

$$\begin{array}{l|l|} P(4.5/24) & 24 = a\cdot(4.5+1)^2 + d \\ N_1(1.5/0) & 0 = a\cdot(1.5+1)^2 + d \end{array}$$

Daraus lassen sich die Parameter d= -6.25 und a=1 bestimmen. Die Funktionsgleichung lautet: $f(x) = (x+1)^2 - 6.25 \quad \Rightarrow \quad f(x) = x^2 + 2x - 5.25$

9 Ansatz: $y = f(x) = ax^2 + bx + c$

Informationen zusammenstellen:

1. Parabel geht durch den Ursprung = Punkt (0/0)
2. Parabel schneidet x-Achse bei x=2, geht also durch den Punkt (2/0)
3. Parabel geht durch den Punkt (1/7)

Informationen mathematisieren, d.h. in Form von Gleichungen schreiben:

1. 1. f(0)=0

Wenn die Parabel durch den Punkt (x=0/y=0) geht, so müssen diese x- und y-Werte die Parabelgleichung **erfüllen**:

$$A\cdot 0^2 + B\cdot 0 + C = 0$$
$$0 + 0 + C = 0$$
$$\underline{\underline{C = 0}}$$

2. f(2)=0

Wenn die Parabel durch den Punkt (x=2/y=0) geht, so müssen diese x- und y-Werte die Parabelgleichung **erfüllen**:

$$A\cdot 2^2 + B\cdot 2 + C = 0$$
$$4A + 2B + C = 0$$

Da wir wissen, dass C = 0 ist:

$$\underline{\underline{4A + 2B = 0}}$$

3. f(1)=7

Wenn die Parabel durch den Punkt (x=1/y=7) geht, so müssen diese x- und y-Werte die Parabelgleichung **erfüllen**:

$$A\cdot 1^2 + B\cdot 1 + C = 7$$
$$A + B + C = 7$$

Da wir wissen, dass C = 0 ist:

$$\underline{\underline{A + B = 7}}$$

2. und 3. zusammen bedeutet:
$$4A + 2B = 0$$
$$A + B = 7$$

Die untere Gleichung nach B auflösen: $B = 7 - A$

Dies anstelle von B in die obere Gleichung einsetzen:
$$4A + 2\cdot(7-A) = 0$$
$$4A + 14 - 2A = 0$$
$$2A + 14 = 0$$
$$2A = -14$$
$$A = -7$$

mit B = 7-A = 7 - (-7) = 14

Die Funktionsgleichung lautet also **$f(x) = -7x^2 + 14x$**

10. Scheitelpunktsform bestimmen mit quadratisch ergänzen:

$f(x) = -0.5x^2+4x-16 = -0.5(x^2-8x)-16 = -0.5(x-4)^2\mathbf{+8}-16 = -0.5(x-4)^2 -8$

Scheitelpunkt S(4/-8); Brennpunkt B(4/-8.5)

a) $f´(x) = 0.5(x-4)^2+8 = 0.5x^2-4x+16$

b) $f´(x) = -0.5(x+4)^2-8 = -0.5x^2-4x-16$

c) $f´(x) = 0.5(x-4)^2-8 = 0.5x^2-4x$

d) $f´(x) = 0.5(x-4)^2-9 = 0.5x^2-4x-1$

e) Die Leitgerade L hat die Funktionsgleichung L=-7.5 (der kürzeste Abstand vom Scheitelpunkt S zur Leitgeraden entspricht dem Abstand vom Brennpunkt B zum Scheitelpunkt S.). Die an der Leitgeraden gespiegelte Funktion f´(x) hat die Funktionsgleichung $f´(x) = 0.5(x-4)^2-7 = 0.5x^2-4x+1$

11. Ansatz: $f(x)=a(x-0)^2+d = ax^2+d$ (da die Parabel symmetrisch zur y-Achse ist) mit P(-4/3) und $d=-\frac{1}{4a}$ $\Rightarrow\ 3 = 16a - \frac{1}{4a}$ $\Rightarrow\ 3 = 16a - \frac{1}{4a} = \frac{64a^2-1}{4a}$

$12a = 64a^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad 64a^2 - 12a - 1 = 0$

Auflösungsformel für quadratische Gleichungen:

$$a_{1,2} = \frac{-(-12) \pm \sqrt{12^2 + 4 \cdot 64 \cdot 1}}{2 \cdot 64} = \frac{12 \pm \sqrt{144+256}}{128} = \frac{12 \pm 20}{128} \quad \Rightarrow a_1 = -\frac{1}{16},\ a_2 = \frac{1}{4}$$

mit $a_1 = -\frac{1}{16}$ wird $d_1=4$ und mit $a_2 = \frac{1}{4}$ wird $d_2=-1$

die Parabelgleichungen lauten somit: $f_1(x) = -\frac{1}{16}x^2+4$ und $f_2(x) = \frac{1}{4}x^2-1$

die Leitgerade L_1 zur Funktion $f_1(x)$ hat die Funktionsgleichung y=8

die Leitgerade L_2 zur Funktion $f_2(x)$ hat die Funktionsgleichung y=-2

12. Extremwertaufgabe: Länge ℓ, Breite b und Höhe h des Quaders

1. HB: $O(\ell,b,h) = 2 \cdot \ell \cdot b + 2 \cdot h \cdot b + 2 \cdot \ell \cdot h$

2. NB: $\ell = 3b$ und $520=4\ell+4b+4h$

$\Rightarrow\ 520 = 4 \cdot (3b)+4b+4h = 16b+4h \quad \Rightarrow\ h = 130 - 4b$

3. ZF: $O(b) = 2 \cdot 3b \cdot b + 2 \cdot (130 - 4b) \cdot b + 2 \cdot 3b \cdot (130 - 4b)$

$O(b) = 6b^2 + 260b - 8b^2 + 780b - 24b^2 = -26b^2 + 1040b$

4. Die quadratische Funktion ist nach unten geöffnet, der Scheitelpunkt ist somit ein Hochpunkt**!** **S(20/10400)**

Die Breite b ist 20m; die Länge ℓ = 60m; die Höhe h=130-4·20=50m!

14. Die Scheitelpunktsform lautet $f(x) = u(x^2+x)+u = u(x+0.5)^2 - \frac{u}{4} + u = u(x+0.5)^2 + \frac{3u}{4}$. Der Scheitelpunkt hat somit die Koordinaten $S\left(-\frac{1}{2}\middle|\frac{3u}{4}\right)$, die aber auch die Funktionsgleichung der Geraden y=-3x-2 erfüllen: $\Rightarrow\ \frac{3u}{4} = -3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 2 \quad \Rightarrow u = -\frac{2}{3}$

10. Lösungen

1. Siehe Musterlösungen
2. a) $x_{1,2} = \{9, -2\}$ b) $x_{1,2} = \{0, 4\}$
   c) $x_{1,2} = \{5, 1.5\}$ d) $x_{1,2} = \{0, \frac{3}{5}\}$
   e) $x_{1,2} = \{0, 0.5\}$ f) $x_{1,2} = \{2, \frac{3}{5}\}$

3. a) $x^2-5x-24=0$ b) $f(x)=x^2-2x$ c) $f(x)=x^2-4x+4$
4. a) $f(x)= -3x^2-6x+10 = -3(x^2+2x)+10 = -3(x+1)^2 +3+10 = -3(x+1)^2 +13$
   b) $f(x)= -8(x^2+3x)+12 = -8(x+1.5)^2 + 18+12 = -8(x+1.5)^2 + 30$
   c) $f(x)= (x+4)(2x-6) = 2x^2+2x-24 = 2(x^2+x)-24 = 2(x+0.5)^2-0.5-24 = 2(x+0.5)^2-24.5$

5. $f(x) = 0.25x^2-x$
6. $f(x) = 0.75x^2-3x+4$
7. $f(x) = 2x^2+3$
8. $f(x) = x^2+2x-5.25$
9. $f(x) = -7x^2 + 14x$
10. a) $f'(x) = 0.5x^2-4x+16$
    b) $f'(x) = -0.5x^2-4x-16$
    c) $f'(x) = 0.5x^2-4x$
    d) $f'(x) = 0.5x^2-4x-1$
    e) $f'(x) = 0.5x^2-4x+1$
11. $f_1(x) = -\frac{1}{16}x^2+4$, $L_1= 8$ und $f_2(x) = \frac{1}{4}x^2-1$, $L_2= -1$
12. Die Breite b ist 20m; die Länge ℓ = 60m; die Höhe h=50m
13. Zuerst b) s(t) = der in der Zeit t gesamthaft zurückgelegte Weg
    s(1) = 1
    s(2) = 1+3 = 4
    s(1) = 1+3+5 = 9
    s(1) = 1+3+5+7 = 16 Alles Quadratzahlen $\Rightarrow$ $s(t) = t^2$
    a) s(5.7) = 32.5 dm
14. $u = -\frac{2}{3}$