Kantonale Fachschaft Mathematik

Repetitionsaufgaben Wurzelgleichungen

Inhaltsverzeichnis

A) Vorbemerkungen

Bitte beachten Sie: Bei Wurzelgleichungen sollte man immer eine Probe machen, bevor man die Lösungsmenge angibt. Da das Quadrieren nicht immer eine Äquivalenzumformung ist, kann es sein, dass man eine Gewinnumformung gemacht hat. D.h. dass man Lösungen erhält, die gar keine Lösungen sind.
Kniffligere Zusatzaufgaben sind mit einem Stern * bezeichnet.

B) Lernziele

- Wurzelgleichungen erkennen und lösen können
- Wissen, dass Wurzelgleichungen mit Hilfe von Quadrieren gelöst werden können
- Wissen, dass Quadrieren eine Gewinnumformung sein kann (Evtl. keine Äquivalenzumformung).
- Verstehen, warum die Lösungen immer überprüft werden müssen
- Wissen, dass es in $\mathbb{R}$ keine negativen Wurzeln gibt

C) Theorie mit Aufgaben

Da sich selbst Wurzeln wie z.B. $\sqrt{x^2+9}$ oder $\sqrt{x^2-16}$ nicht vereinfachen lassen (Merke: Bei $+$ oder $-$ unter der Wurzel darf man die Wurzel nicht ziehen! Z.B. $\sqrt{9+16} \neq 3+4$, sondern $\sqrt{25}=5$), muss man bei Gleichungen mit Wurzelausdrücken im Normalfall die Wurzeln zerstören. Dies schafft man, indem man beide Seiten der Gleichung quadriert. Dies notieren wir mit dem Zeichen $(\ \ )^2$.

<u>1.Bsp.</u>:

$$\sqrt{x-4} = \sqrt{2x+3} \qquad \Big|\ (\ \ )^2$$
$$x-4 = 2x+3$$

Quadriert man also eine Wurzel, so bleibt nur noch der Ausdruck unter der Wurzel bestehen. Man hat nun eine lineare Gleichung erhalten, welche ganz einfach aufzulösen ist.

$$x-4 = 2x+3 \qquad \Big| -3 \quad -x$$
$$-7 = x$$

Das war ja gar nicht schwierig, denkst du sicher. Doch leider steckt eine gemeine Falle in jeder Wurzelgleichung drin:

Bei jeder Wurzelgleichung müssen die **Lösung(en) kontrolliert werden**! Quadrieren kann eine Gewinnumformung sein!

Ich muss also die Lösung in die ursprüngliche Gleichung einsetzen und schauen, ob alles stimmt. Setzen wir also $x=-7$ in die ursprüngliche Gleichung ein:

$$\sqrt{-7-4} = \sqrt{2\cdot(-7)+3}$$
$$\sqrt{-11} = \sqrt{-11}$$

Die Gleichung scheint auf den ersten Blick zu stimmen, denn es steht ja links und rechts des Gleichheitszeichens genau derselbe Term. Da man jedoch in $\mathbb{R}$ von negativen Zahlen die Wurzel nicht ziehen darf, darf man $x=-7$ gar nicht in die ursprüngliche Gleichung einsetzen. Mit anderen Worten $x=-7$ ist keine Lösung der Gleichung, die Gleichung hat also gar keine Lösung: IL = $\{\ \}$.

Wieso muss man bei Wurzelgleichungen überhaupt die Lösungen kontrollieren? Der Grund liegt darin, dass immer wenn man beim Umformen der Gleichung beide Seiten quadriert, falsche Lösungen entstehen können, da Quadrieren eine Gewinnumformung sein kann. D.h. Quadrieren ist im Allgemeinen keine Äquivalenzumformung.
So hat z.B. die sehr einfache Gleichung $x=3$ natürlich nur die Lösung $x=3$, die „quadrierte Gleichung“ $x^2=9$ hat aber die zwei Lösungen $x_{1,2}=\pm 3$.
Dies ist leider jedoch nicht die einzige Tücke bei den Wurzelgleichungen.

<u>2. Bsp.</u>: $\sqrt{x+1} = x-5 \qquad \Big|\ (\ )^2$

$x+1=(x-5)^2$

Nun muss ich das Binom rechts richtig berechnen!

$x+1=x^2-10x+25$

Nun haben wir eine quadratische Gleichung erhalten und können gleich das Vorgehen zum Lösen dieser Art von Gleichung repetieren: zuerst Null machen auf der einen Seite, danach faktorisieren und dann erkennt man die Lösungen.

$$x+1=x^2-10x+25 \qquad \big|-x \quad -1$$
$$0=x^2-11x+24 \qquad \big|\text{faktorisieren}$$
$$0=(x-8)(x-3) \qquad \rightarrow \ x_1=8, x_2=3$$

Kontrolle der möglichen Lösungen

$x_1=8$: $\sqrt{8+1}=8-5$ Beide Seiten der Gleichung ergeben 3, also stimmt $x_1=8$

$x_2=3$: $\sqrt{3+1}=3-5$ Die linke Seite der Gleichung ergibt 2, die rechte –2, also ist $x_2=3$ keine Lösung der Gleichung.

IL = $\{8\}$

<u>3. Bsp.</u>: $2\sqrt{x+2}=3\sqrt{x-3} \qquad \Big|\ (\ )^2$

Wenn zwischen zwei Ausdrücken kein $+$ oder $-$ steht, sondern ein Multiplikationszeichen, so werden beim Quadrieren einfach beide Ausdrücke separat quadriert.

$4(x+2)=9(x-3)$

Da die Wurzel nun „ihren Inhalt“ nicht mehr „schützt“, da sie verschwunden ist, muss man Klammern um den ehemaligen Wurzelinhalt setzen.

$$4x+8=9x-27$$
$$35=5x$$
$$7=x$$

Wie man bei der Lösungskontrolle feststellt, ist $x=7$ tatsächlich eine Lösung der Gleichung.

Ergänzung: Kommen bei Wurzelgleichungen $+$ oder $-$ auch ausserhalb der Wurzeln vor, so sind die Gleichungen noch kniffliger aufzulösen. Man muss dann zweimal quadrieren.

4. Bsp.:	$\sqrt{x-15}+\sqrt{x}=\sqrt{x+9}$	$(\ )^2$ links entsteht dann ein Binom!
	$(x-15)+2\cdot\sqrt{x-15}\cdot\sqrt{x}+x=x+9$	Wurzel auf eine Seite, die anderen Teile auf die andere Seite
	$2\cdot\sqrt{x-15}\cdot\sqrt{x}=-x+24$	$(\ )^2$ nochmals quadrieren
	$4\cdot(x-15)\cdot x=x^2-48x+576$	linke Seite berechnen
	$4x^2-60x=x^2-48x+576$	Alles auf eine Seite
	$3x^2-12x-576=0$	:3
	$x^2-4x-192=0$	faktorisieren, oder Auflösungsformel für quadratische Gleichung verwenden
	$(x+12)(x-16)=0$	Ein Produkt ist Null, wenn ein Faktor = 0

$x_1=-12 \quad x_2=16$

Kontrolle: $x_1=-12$: Keine Lösung, da negative Wurzel entsteht.

$x_2=16$: $\sqrt{16-15}+\sqrt{16}=\sqrt{16+9}$

$1+4=5$

Wahre Aussage $\Rightarrow IL=\{16\}$

D) Aufgaben mit Musterlösungen

Aufgaben

1) $\sqrt{3x-2}=\sqrt{2x+7}$ 2) $3\sqrt{x-1}=\sqrt{x^2+9}$ 3) $\sqrt{2x-1}=x$

4) $\sqrt{x+2}=x-4$

5*) $\sqrt{2x^3-6x+5}=x^2+x-3$ 6*) $\sqrt{1+x\sqrt{1+8x}}=x+1$

Lösungen

1) $\sqrt{3x-2}=\sqrt{2x+7}$ $\quad|\ (\ )^2$

$3x-2=2x+7 \quad |+2 \quad -2x$

$x=9$

Kontrolle: $\sqrt{3\cdot9-2}=\sqrt{2\cdot9+7}$ stimmt, also $IL=\{9\}$

2) $3\sqrt{x-1}=\sqrt{x^2+9}$ $\quad|\ (\ )^2$

$9(x-1)=x^2+9$

$9x-9=x^2+9 \quad |-9x \quad +9$

$0=x^2-9x+18 \quad |$faktorisieren

$0=(x-6)(x-3)$

$x_1 = 6, x_2 = 3$

Kontrolle: $x_1 = 6$: $3\sqrt{6-1} = \sqrt{6^2+9}$ stimmt

$x_2 = 3$: $3\sqrt{3-1} = \sqrt{3^2+9}$ stimmt

Damit: IL = $\{3,6\}$ (oder IL = $\{6,3\}$, die Reihenfolge der Lösungen spielt keine Rolle)

3) $\sqrt{2x-1} = x \quad \big| \ (\ )^2$

$2x-1 = x^2 \quad \big| -2x \quad +1$

$0 = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$

Die mögliche Lösung $x = 1$ ist tatsächlich richtig, also IL = $\{1\}$

Die folgenden Lösungen sind nur in abgekürzter Schreibweise notiert:

4) quadrieren: $x+2 = (x-4)^2 \qquad x+2 = x^2 - 8x + 16 \qquad 0 = x^2 - 9x + 14$

$0 = (x-2)(x-7) \quad x_1 = 2, x_2 = 7$ Kontrolle: Nur $x_2 = 7$ stimmt $\Rightarrow$ IL = $\{7\}$

5) quadrieren: $2x^3 - 6x + 5 = (x^2 + x - 3)^2 \qquad 2x^3 - 6x + 5 = x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 6x + 9$

$0 = x^4 - 5x^2 + 4 \qquad 0 = (x^2-1)(x^2-4) = (x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$

$x_1 = -2, x_2 = -1, x_3 = 1, x_4 = 2$ Kontrolle: Nur $x_4 = 2$ stimmt $\Rightarrow$ IL = $\{2\}$

6) quadrieren: $1 + x\sqrt{1+8x} = x^2 + 2x + 1 \qquad x\sqrt{1+8x} = x^2 + 2x \qquad x_1 = 0$ („Mathiblick“)

Falls $x \neq 0$, so dividiere ich beide Seiten durch x: $\sqrt{1+8x} = x + 2$ quadrieren

$1 + 8x = x^2 + 4x + 4 \qquad x_2 = 3, x_3 = 1$ Kontrolle: Alle 3 Resultate stimmen $\Rightarrow$ IL = $\{0,1,3\}$